

Казанский государственный университет
Физический факультет

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Математический анализ:
Ряды
(II семестр)

Казань 2006

Введение

Предлагаемый сборник расчетных заданий составлен для студентов первого курса физического факультета.

Сборник содержит четыре задания по числовым рядам, три задания по функциональным рядам, одно задание на приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов, два задания на разложения функций в степенной ряд и ряд Фурье.

Рекомендуется выполнить задания параллельно с прохождением материала на практических занятиях.

Задача 1. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n 2^n}{6^n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n}$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{2n}} - \frac{1}{5^{2n-1}} \right)$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 - 21n - 8}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$.
13. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.
15. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}$.
17. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$.
19. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$.
25. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

Задача 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{\ln(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n^4 + n^2 + 1}$.
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(3n)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}})$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 5^n}{5^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{2n+99}{3n+1})^n$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2) \sqrt[4]{n+2}}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[4]{2n}}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n + \frac{\pi}{6}) \ln(1 + \frac{3}{n})$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \cdot \ln^\alpha(n+1)} \quad (0 < x < \pi)$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3 + 1}}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \ln(n+1)}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2(n+1)}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(\ln 3)^n}$.
24. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \sqrt{\ln \ln n}}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$.
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

$$9. \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \sin \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{x}{n} \right) n^2.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2 + (-1)^n}{n^3}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n+1}}{n(3 + \sin \frac{\pi n}{4})}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2 + (-1)^n}{6} \pi.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right) n^2.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \frac{n}{5^n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right) n^2.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n n^2 + 1 - 1 \right).$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}.$$

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^3-1}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+3)}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x > 0).$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+7)}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x > 0).$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1) \quad (0 < x \neq 1).$$

$$10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{n}\right)^n \quad (x > 0).$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x > 0).$$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1)$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^3}$.
16. $\sum_{n=2}^{\infty} (e^{\frac{3\sqrt{n}}{n^3}} - 1 - 1)$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-2)\sqrt[3]{n^2+2}}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2\sqrt[3]{n+6}}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n^2}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-1)(2n+1)}}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n+1}}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

Задача 5. Исследовать на равномерную сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+x^3}}, \quad x \in [0, \infty)$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5} + 1}, \quad x \in [0, 2].$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad x \in [-2, 2].$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right), \quad x \in [0, a].$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}, \quad x \in [-1, 6].$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, 2\pi].$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}, \quad x \in [0, 1].$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in [0, 1].$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}, \quad x \in [1, 3].$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}, \quad x \in (-\infty, 0].$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n^2}, \quad x \in [0, 2].$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n\sqrt{n}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^{3/2} \cdot x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos \pi nx, \quad x \in (-\infty, \infty).$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0, \frac{1}{3}].$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^3}, \quad x \in [0, \infty).$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in [0, \infty).$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \sqrt{n}}, \quad x \in [0, \infty).$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in [-3, 3].$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}, \quad x \in [0, 2].$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} (\sin \frac{\pi}{2^n}) \cdot (x-2)^n, \quad x \in [1, 3].$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 4^n}, \quad x \in [-1, 0].$$

Задача 6. Определить радиус и область сходимости и исследовать поведение в граничных точках области сходимости.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{n} (x+1)^n.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n.$$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n (x + 4)^n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 3)^n}{(n + 1) 5^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x - 2)^{2n}}{2n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n - 2)(x - 3)^n}{(n + 1)^2 2^{n+1}}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (x-1)}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (x-2)^n$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{2n+1}$.
20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n}$.

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^{2n}}{n}.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+2)^n.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x-2)^n}.$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n}.$$

Задача 7. Найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)x^{n-1}.$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}.$$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n(2n-1)x^{n-1}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{n!} x^{3n}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)x^n$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$.
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.
20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{4n+1}}{4n+1}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$.
23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{2^n \cdot n!} x^n$.
24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.
25. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$.

Задача 8. Вычислить с точностью 10^{-3} .

1. $\frac{1}{e}$
2. $\sin \frac{\pi}{5}$
3. $\sin 12^\circ$
4. $\sqrt[3]{520}$
5. $\sqrt{15}$
6. $\ln 7$
7. $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$
8. $\operatorname{sh} 1$
9. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx.$
10. $\int_0^1 \sin x^2 dx.$
11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$
12. $\int_0^2 \frac{e^x}{x} dx.$
13. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$
14. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$
15. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$
16. $\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$
17. $\int_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx.$

$$18. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256 + x^4}}.$$

$$19. \int_0^{0,4} \frac{\ln(1 + \frac{x}{2})}{x} dx.$$

$$20. \int_0^{0,4} \cos(\frac{5x}{2})^2 dx.$$

$$21. \int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx.$$

$$22. \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$$

$$23. \int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

$$24. \int_0^{1/3} e^{-x^2} dx.$$

$$25. \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{x} dx.$$

Задача 9. Разложить $f(x)$ в ряд и найти область сходимости полученного ряда.

1. $f(x) = \frac{1}{a-x}$ ($a \neq 0$): 1) по степеням x , 2) по степеням $x-b$ ($b \neq a$), 3) по степеням $\frac{1}{x}$.

2. $f(x) = e^{ax}$ по степеням $x-b$, ($b \neq a$).

3. $f(x) = \sin ax$ по степеням x .

Разложить $f(x)$ в ряд Маклорена и найти область сходимости полученного ряда.

4. $f(x) = (1-x^2)^{-3/2}$.

5. $f(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \sin x)$.

6. $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$.
7. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.
8. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.
9. $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+x-6}$.
10. $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2+3x+3}$.
11. $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$.
12. $f(x) = (x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2}$.
13. $f(x) = \sin x \cos^2 x$.
14. $f(x) = x \operatorname{sh}^2 x$.
15. $f(x) = \ln[(2+x)^{2+x}] + \ln[(2-x)^{2-x}]$.
16. $f(x) = \left(\frac{1}{2}+x\right)e^{-2x} - \left(\frac{1}{2}-x\right)e^{2x}$.
17. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
18. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1-x}$.
19. $f(x) = \ln^2(1-x)$.
20. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{6+x^2}{3-2x^2}$.
21. $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.
23. $f(x) = (x-1) \operatorname{sh} x$.
24. $f(x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x$.
25. $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x} - \cos 3x$.

Задача 10. Разложить в ряд Фурье $f(x)$.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
2. $f(x) = \pi + x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$
3. $f(x) = |x|, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$
4. $f(x) = \begin{cases} -a, & -\pi \leq x < 0, \\ a, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x \leq 0, \\ 3x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$

$$6. f(x) = \begin{cases} a, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ b, & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$7. f(x) = x + \operatorname{sgn} x, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$8. f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$9. f(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$10. f(x) = e^{2x}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

$$11. f(x) = \cos ax, \quad a \in \mathbf{Z}, -\pi \leq x \leq \pi.$$

$$12. f(x) = x \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$13. f(x) = \arcsin(\sin x).$$

$$14. f(x) = (x) \text{ — расстояние до ближайшего целого числа.}$$

$$15. f(x) = |\sin x|.$$

$$16. f(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Разложить по косинусам.

$$18. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Разложить по синусам.

$$19. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Разложить по синусам.

$$20. f(x) = x \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Разложить по синусам.

$$21. f(x) = x(a - x).$$

Разложить в интервале $(0, a)$, $a > 0$.

$$22. f(x) = x(a - x), \quad 0 < x < a.$$

Разложить по синусам.

$$23. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin^2 x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Разложить в $(-\pi, \pi)$.

$$24. f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Разложить в $(-\pi, \pi)$.

$$25. f(x) = \sin ax, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Разложить по косинусам.