МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И
ГРАВИТАЦИИ

Б А Л А К И Н А. Б.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

ЧАСТЬ II
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

(КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

КАЗАНЬ - 2003

УДК 536.758 : 533.7 + 538.6.011 : 523 + 539.12

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

ЧАСТЬ II. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

(КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

КАЗАНЬ. 2003. 67 с.

АВТОР: **БАЛАКИН А.Б.**, доктор физико - математических наук, заведующий кафедрой теории относительности и гравитации КГУ.

Библиография: 38 наименований.

Предназначено для студентов и аспирантов физического факультета.

Печатается по решению Редакционно - издательского совета физического факультета Казанского государственного университета.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР: **КАЙГОРОДОВ В.Р.**, доктор физико - математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТ: **ИГНАТЬЕВ Ю.Г.**, доктор физико - математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии КГПУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс "Специальная теория относительности"(СТО) как базовый спецкурс был включен в программу обучения студентов физического факультета в 1960 году в процессе создания кафедры теории относительности и гравитации в Казанском университете. Первоначально программа курса предполагала изложение классических основ СТО: релятивистской кинематики, динамики и теории поля. Однако, в шестидесятые и семидесятые годы прошедшего столетия в релятивистской теории особый статус приобрела *теория многочастичных систем*, и программа курса СТО была приведена в соответствие с требованиями времени. Это событие в большой степени было инициировано Н.А.Черниковым, одним из основоположников релятивистской кинетической теории, лекции и доклады которого хорошо помнят сотрудники кафедры. Разработка расширенной концепции курса СТО и подготовка первого базового курса лекций была выполнена Ю.Г.Игнатьевым и Г.Г.Ивановым. Курс лекций постоянно модифицируется, однако, программа курса осталась практически неизменной. Программа курса СТО рассчитана на два семестра и включает два раздела:

(1) **Релятивистская кинематика, динамика и теория поля**

1.1. Инвариантно-групповые и геометрические основы СТО

1.2. Релятивистская кинематика

1.3. Релятивистская механика

1.4. Релятивистская теория поля

(2) **Релятивистская теория многочастичных систем**

2.1. Релятивистская кинетическая теория

2.2. Релятивистская гидродинамика

2.3. Релятивистская теория плазмы

2.4. Релятивистская электродинамика сплошных сред

Материал *первого раздела* предельно широко представлен в мировой учебно-научной литературе, однако, лишь малая часть современных книг по релятивистской теории написана на русском языке или переведена на него. Среди рекомендуемых книг, изданных на русском языке, следует выделить учебники и монографии [1-6]. Систематического изложения материала *второго раздела*, к сожалению, пока нет. Опубликованные к настоящему времени научные монографии [7-15], богатые в идейном и методическом плане, являются библиографической редкостью, а классические учебники [16-18] уделяют релятивистским аспектам проблемы лишь несколько параграфов. Принимая также во внимание состояние дел с другими спецкурсами, методический совет кафедры теории относительности и гравитации Казанского университета принял решение подготовить серию методических разработок с грифом "Конспекты лекций зафиксировав таким образом достижения и многолетний опыт ведущих лекторов кафедры ТОиГ.

Предлагаемое вниманию читателя методическое пособие по релятивистской гидродинамике является вторым изданием из упомянутой серии. Первым стало пособие [19], которое наряду с монографиями [20,21] частично решает проблему методического обеспечения курса СТО. В конце каждой лекции сформулированы упражнения, самостоятельное выполнение которых поможет слушателю овладеть основами релятивистской гидродинамики и связать новые знания с представлениями о классической гидродинамике.

ЛЕКЦИЯ 1

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Термин *релятивистская* гидродинамика применяется к теории макроскопических движений жидкости и газа в том случае, если в основу теории положены релятивистски инвариантные эволюционные уравнения. Это означает, что релятивистская гидродинамика как математическая модель может быть адекватно применена и к классическим нерелятивистским течениям, и к потокам частиц с ультрарелятивистскими энергиями, и к системам частиц, для которых средняя кинетическая энергия и энергия покоя оказываются одного порядка. Стимулом к созданию и развитию релятивистской гидродинамики как раздела релятивистской механики сплошных сред послужили в первую очередь проблемы астрофизического и космологического характера, однако, во второй половине 20 века к ним добавились проблемы физики высокотемпературной плазмы, физики ускорителей, физики множественного рождения при столкновении частиц высоких энергий, а также проблемы лазерной физики [9].

Крупнейшими вехами в истории создания релятивистской гидродинамики принято считать работы Эккарта [22], Лихнеровича [23,24], Де Гроота (и его коллег)[25], Ландау и Лифшица [26], Синга [27], Израэля [28], Стьюарта [29], Черникова [30]. После формирования основ теории наступило время интенсивного исследования *релятивистских гидродинамических моделей*, самыми известными из которых являются модели идеальной, вязкой, теплопроводящей, сверхтекучей и заряженной жидкости. Специфические уравнения состояния придают этим моделям индивидуальность, но есть и то, что объединяет все эти модели, а именно, общековариантный формализм описания, эволюционные уравнения и определения базовых динамических величин.

1.1. Четырехмерный вектор скорости наблюдателя

Четырехмерное векторное поле скорости наблюдателя V^i есть базовый элемент описания движения гидродинамической системы (для краткости слова "четырехмерное"и "наблюдателя"в дальнейшем не будут использоваться). Вектор V^i непременно времениподобен и нормирован на единицу, т.е., $g_{ik}V^iV^k = 1$. Если наблюдатель движется "согласованно"с гидродинамической системой (ниже мы расшифруем этот термин), то у вектора скорости появляется особый статус - статус *гидродинамической* скорости или, иначе говоря, макроскопической скорости движения системы в целом. В дальнейшем мы познакомимся с двумя наиболее употребительными определениями гидродинамической скорости: определениями Эккарта и Ландау-Лифшица.

Наличие векторного поля V^i делает выделенными соответствующее времениподобное направление и пространственноподобную гиперповерхность Σ, ортогональную этому направлению. Проектирование произвольного тензора на гиперповерхность Σ осуществляется с помощью симметричного тензора

$$\Delta_{ik} \equiv g_{ik} - V_i V_k \,, \tag{1}$$

который обладает следующими свойствами:

$$\Delta_{ik}V^k \equiv 0 \,, \quad \Delta_{ik}\Delta^{ij} = \Delta^j_k \,, \quad \Delta^k_k = 3 \,, \tag{2}$$

позволяющими назвать его проектором.

1.2. Вектор потока числа частиц

Четырехмерный вектор N^i в силу ряда исторических причин называется вектором потока числа частиц. По определению он времениподобен, т.е., $g_{ik}N^iN^k > 0$. Скаляр

$$n \equiv N^i V_i \tag{3}$$

по определению есть число частиц в единице объема, фиксируемое наблюдателем, движущимся со скоростью V^i. Пространственноподобный вектор

$$J^i \equiv \Delta^i_k N^k = N^i - nV^i \tag{4}$$

описывает дефект потока числа частиц, который зависит от скорости перемещения наблюдателя, пересчитывающего частицы. В силу (3) и (4) четырехмерный вектор N^i разбивается на продольную и поперечную относительно V^i составляющие

$$N^i = nV^i + J^i \,. \tag{5}$$

Если гидродинамическая система состоит из нескольких компонент, то вводятся векторы $N^i_{(a)}$ для каждой из них, индекс (a) при этом сортирует компоненты. В силу свойства аддитивности, выполняющегося для числа частиц, полный поток числа частиц есть сумма парциальных потоков, следовательно,

$$N^i = \sum_{(a)} N^i_{(a)} \,. \tag{6}$$

Тогда парциальные плотности

$$n_{(a)} \equiv N^i_{(a)} V_i \tag{7}$$

также аддитивно входят в полную плотность числа частиц

$$n = \sum_{(a)} n_{(a)} \,, \tag{8}$$

что позволяет ввести скаляры концентрации $x_{(a)}$ и вектор потока диффузии $I^i_{(a)}$ с помощью соотношений

$$n_{(a)} = x_{(a)} n \,, \quad \sum_{(a)} x_{(a)} = 1 \,, \tag{9}$$

$$N^i_{(a)} = x_{(a)} N^i + I^i_{(a)} \,, \quad I^i_{(a)} V_i = 0 \,, \quad \sum_{(a)} I^i_{(a)} = 0 \,. \tag{10}$$

1.3. Тензор энергии-импульса

Тензор энергии - импульса T^{ik} в рамках релятивистской гидродинамики рассматривается как симметричный тензор. С помощью вектора скорости V^l и проектора Δ^{jl} составим все возможные независимые свертки этого тензора.

1.3.1. Поток энергии - импульса

$$\pi^i \equiv T^{ik} V_k \,. \tag{11}$$

1.3.2. Скалярная плотность энергии

$$W \equiv T^{ik} V_i V_k = \pi^i V_i \,. \tag{12}$$

1.3.3. Вектор Пойнтинга

$$I^i \equiv T^{jl} V_j \Delta^i_l = \Delta^i_j T^{jl} V_l \,, \quad I^i V_i = 0 \,. \tag{13}$$

1.3.4. Тензор напряжений

$$\mathcal{P}^{ik} \equiv \Delta^i_j T^{jl} \Delta^k_l \,. \tag{14}$$

С помощью определений (11)-(14) однозначно восстанавливается сам тензор энергии-импульса

$$T^{ik} = W V^i V^k + V^i I^k + V^k I^i + \mathcal{P}^{ik} \,, \tag{15}$$

а также вектор потока энергии - импульса

$$\pi^i = W V^i + I^i. \tag{16}$$

1.3.5. Удельная плотность энергии

Плотность энергии часто выражают через скаляр e

$$e \equiv \frac{W}{n} \,, \tag{17}$$

представляющий собой энергию, приходящуюся на одну частицу, или иначе - удельную энергию.

1.3.6. Паскалевское давление

Тензор напряжений в гидродинамике принято раскладывать на скаляр Паскалевского давления P и тензор анизотропного давления Π^{ik}

$$\mathcal{P}^{ik} = -P\ \Delta^{ik} + \Pi^{ik}\,. \tag{18}$$

Из тензора анизотропного давления Π^{ik} можно выделить бесследовую часть $\Pi^{ik}_{(0)}$

$$\Pi^{ik}_{(0)} \equiv \Pi^{ik} - \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi\,, \tag{19}$$

где $\Pi \equiv \Pi^{l}_{l}$ - след тензора Π^{ik}.

1.3.7. Энтальпия

Из плотности энергии и Паскалевского давления можно построить вспомогательную величину - теплосодержание или энтальпию H:

$$H \equiv W + P\,, \tag{20}$$

а также удельную энтальпию h:

$$h \equiv \frac{H}{n} = e + \frac{P}{n}\,. \tag{21}$$

1.3.8. Вектор потока тепла

Пространственную часть разности между потоком энергии - импульса π^i и потоком энтальпии hN^i принято называть вектором потока тепла $I^i_{(q)}$:

$$I^i_{(q)} \equiv \Delta^i_k\left(\pi^k - hN^k\right) = \Delta^i_k\left(T^{kl}V_l - hN^k\right) = I^i - hJ^i. \tag{22}$$

1.4. Вектор потока энтропии

Вектор потока энтропии S^i призван связать гидродинамику с термодинамикой. Как легко предсказать, самостоятельный смысл имеют скаляр энтропии S

$$S \equiv S^i V_i\,, \tag{23}$$

удельная энтропия s

$$s \equiv \frac{S}{n}\,, \tag{24}$$

а также пространственноподобная часть вектора потока энтропии $I^i_{(s)}$

$$I^i_{(s)} \equiv S^i - sN^i\,, \quad I^i_{(s)}V_i = 0\,. \tag{25}$$

Согласно стандартному определению в рамках *линейной* термодинамики вектор $I^i_{(s)}$ выражается через вектор теплового потока $I^i_{(q)}$ и векторы диффузионных потоков (если гидродинамическая система содержит несколько компонент):

$$I^i_{(s)} = \frac{1}{T}\left(I^i_{(q)} - \sum_{(a)} \mu_{(a)} I^i_{(a)}\right) . \tag{26}$$

Здесь T - температура, а $\mu_{(a)}$ - химический потенциал компоненты сорта (a). Если гидродинамическая система гомогенна, то $I^i_{(a)} = 0$, и тогда

$$S^i = sN^i + \frac{1}{T} I^i_{(q)} \,. \tag{27}$$

1.4.1. Причинная термодинамика и вектор потока энтропии

Формулу (26) принято называть формулой Эккарта. Поскольку версия Эккарта релятивистской теории необратимых процессов столкнулась с проблемой нарушения причинности, Израэлем и Стьюартом была создана так называемая *причинная (causal)* релятивистская термодинамика. Эта теория известна также под названиями *расширенная (extended)* термодинамика, термодинамика второго порядка (second-order) и *переходная (transient)* термодинамика [31,32]. Причинная релятивистская термодинамика стала обобщением нерелятивистской теории Максвелла - Каттанео [33]. По версии Израэля и Стьюарта избежать нарушения принципа причинности удается в том случае, если в формуле (27) под s понимать величину

$$s \to s_{(\mathrm{eq})} - \frac{1}{2nT}\left(\beta_0 \; \Pi^2 - \beta_1 \; g_{lk} I^l_{(q)} I^k_{(q)} + \beta_2 \; \Pi^{lm}_{(0)} \Pi^{kn}_{(0)} g_{lk} g_{mn}\right) , \tag{28}$$

а под $I^i_{(q)}$ - вектор

$$I^i_{(q)} \to I^i_{(q)} + \frac{\alpha_0}{T} \; \Pi I^i_{(q)} + \frac{\alpha_1}{T} \; \Pi^{ik}_{(0)} I^l_{(q)} g_{kl} \,. \tag{29}$$

Три феноменологических коэффициента β_0, β_1, β_2 описывают, соответственно, скалярный, векторный и тензорный диссипативные вклады в полный скаляр энтропии. Коэффициенты α_0, α_1 призваны описать связь теплопроводности и вязкости. Все пять перечисленных коэффициентов считаются функциями температуры и плотности числа частиц. Использование термина "термодинамика второго порядка"наряду с термином "причинная термодинамика"мотивировано тем, что скаляр энтропии содержит вклады, квадратичные относительно необратимых потоков. Символ $s_{(\mathrm{eq})}$ использован в (28) для того, чтобы явно обозначить часть, линейную по термодинамическим потокам, а потому представляющую собой одно из главных действующих лиц в *равновесной (equilibrium)* термодинамике.

1.4.2. Химический потенциал

Поскольку понятие энтропии вовлекло в рассмотрение термодинамические потенциалы $\mu_{(a)}$, напомним, что скаляр полного химического потенциала системы задается соотношением

$$\mathcal{M} \equiv \sum_{(a)} x_{(a)}\mu_{(a)} = h - Ts\,. \tag{30}$$

Это определение более часто встречается в виде термодинамического равенства

$$Ts = e + \frac{P}{n} - \sum_{(a)} x_{(a)}\mu_{(a)}\,. \tag{31}$$

1.5. Гидродинамическая скорость. Определение Эккарта

Кажется вполне естественным, что для описания движения системы как целого вектору V^i следует придать гидродинамический смысл, согласовав его с одним из трех объектов: вектором потока числа частиц N^i, тензором энергии - импульса T^{ik} или вектором потока энтропии S^i. Определение Эккарта связано как раз с первым из них:

$$U^i \equiv \frac{N^i}{\sqrt{N^k N_k}}\,. \tag{32}$$

При таком определении скаляр плотности числа частиц оказывается равным

$$n = N^i U_i = \sqrt{N^k N_k}\,, \tag{33}$$

вектор J^i исчезает, и сам вектор N^i становится параллельным вектору скорости

$$N^i = nU^i. \tag{34}$$

Тогда, согласно (22), вектор Пойнтинга совпадает с тепловым потоком $I^i = I^i_{(q)}$, а вектор потока энтропии однокомпонентной среды в линейной теории Эккарта принимает вид

$$S^i = snU^i + \frac{1}{T} I^i_{(q)}\,. \tag{35}$$

1.6. Гидродинамическая скорость. Определение Ландау - Лифшица

Рассмотрим собственные векторы $\lambda^i_{(\alpha)}$ и собственные значения $\Omega_{(\alpha)}$ тензора энергии - импульса T^{ik}, удовлетворяющие по определению соотношениям

$$T^i{}_k \lambda^k_{(\alpha)} = \Omega_{(\alpha)} \lambda^i_{(\alpha)}\,, \tag{36}$$

$$\det\left(T^i{}_k - \Omega_{(\alpha)} \delta^i_k\right) = 0\,. \tag{37}$$

Если собственный вектор $\lambda^i_{(\alpha)}$ неизотропен, то собственное значение $\Omega_{(\alpha)}$ также может быть представлено с помощью сверток

$$\Omega_{(\alpha)} = T_{ik}\ \frac{\lambda^i_{(\alpha)} \lambda^k_{(\alpha)}}{\lambda^s_{(\alpha)} \lambda_{s(\alpha)}}\,. \tag{38}$$

Если $\{\lambda^i_{(\alpha)}\}$ составляют ортогональный набор неизотропных векторов, т.е.,

$$g_{ik} \lambda^i_{(\alpha)} \lambda^k_{(\beta)} = 0\,, \quad (\alpha) \neq (\beta)\,, \tag{39}$$

тензор энергии - импульса допускает следующее представление

$$T^{ik} = \sum_{(\beta)=0}^{3} \Omega_{(\beta)}\ \frac{\lambda^i_{(\beta)} \lambda^k_{(\beta)}}{\lambda^s_{(\beta)} \lambda_{s(\beta)}}\,. \tag{40}$$

Согласно требованиям, предъявляемым к тензору энергии - импульса материальной среды, один из собственных векторов, скажем $\lambda^i_{(0)}$, обязан быть времениподобным, а три остальных - пространственноподобными. Тогда этот собственный вектор можно нормировать на единицу ($\lambda^s_{(0)}\lambda_{s(0)} = 1$), назвать его макроскопической скоростью по определению Ландау-Лифшица и обозначить символом U^i. При этом собственное значение $\Omega_{(0)}$ совпадет с плотностью энергии W, что легко подтвердить формулами (12),(36)-(40). Такое определение ведет к ряду упрощений. Например, поток энергии - импульса

$$\pi^i = T^{ik}U_k = WU^i \tag{41}$$

содержит только продольную часть, а его пространственная часть I^i - вектор Пойнтинга - исчезает. Это в свою очередь означает, что тепловой поток пропорционален вектору J^i

$$I^i_{(q)} = -hJ^i\,. \tag{42}$$

Тогда вектор потока числа частиц выражается через тепловой поток

$$N^i = nU^i - \frac{1}{h}I^i_{(q)}\,, \tag{43}$$

тензор энергии-импульса заметно упрощается

$$T^{ik} = WU^iU^k + \mathcal{P}^{ik} = WU^iU^k - P\Delta^{ik} + \Pi^{ik}\,, \tag{44}$$

а вектор потока энтропии (27) однокомпонентной среды в теории Эккарта выражается через химический потенциал μ:

$$S^i = snU^i + \frac{\mu}{hT}I^i_{(q)}\,. \tag{45}$$

Три собственных значения, отвечающие трем пространственноподобным векторам, связаны со скалярами давления $\mathcal{P}_{(\alpha)}$:

$$\Omega_{(\alpha)} = -\mathcal{P}_{(\alpha)}\,. \tag{46}$$

В общем анизотропном случае скаляры давления различны, однако, если

$$\mathcal{P}_{(1)} = \mathcal{P}_{(2)} = \mathcal{P}_{(3)} \equiv \mathcal{P}\,, \tag{47}$$

то в силу соотношения

$$\sum_{(\beta)=1}^{3} \frac{\lambda^i_{(\beta)}\lambda^k_{(\beta)}}{\lambda^s_{(\beta)}\lambda_{s(\beta)}} = -g^{ik} + U^i U^k = -\Delta^{ik} \tag{48}$$

мы непременно получим, что

$$T^{ik} = W U^i U^k - \Delta^{ik}\mathcal{P}\,. \tag{49}$$

Очевидно, что в пространственно изотропной жидкости

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{3}\Delta_{ik}T^{ik}\,. \tag{50}$$

След тензора энергии-импульса, равный сумме его собственных значений, в этом случае имеет вид

$$T^k_k = W - 3\mathcal{P}\,. \tag{51}$$

Соотношение $W = 3\mathcal{P}$, известное как уравнение состояния ультрарелятивистской жидкости, сопряжено, таким образом, с равенством нулю следа тензора энергии-импульса.

1.7. Дифференциальные операторы в релятивистской гидродинамике

Ковариантную производную от любого тензорного объекта $\mathbf{L}$, обозначаемую символом $\mathbf{L}_{;i}$, как обычно, представим в виде суммы продольной и поперечной относительно вектора скорости V^i составляющих:

$$\mathbf{L}_{;i} = V_i \; D\mathbf{L} + \nabla_i \mathbf{L}\,, \tag{52}$$

где введены обозначения

$$D\mathbf{L} \equiv V^k \mathbf{L}_{;k}\,, \quad \nabla_i \mathbf{L} \equiv \Delta^k_i \mathbf{L}_{;k}\,, \quad V^i \nabla_i = 0\,. \tag{53}$$

Оператор дифференцирования D, являющийся производной по направлению, заданному вектором скорости V^i, принято называть конвективной производной [8], а оператор ∇_i - пространственной производной. Смысл терминов становится очевидным, если перейти к локально лоренцевой системе отсчета [8], в которой наблюдатель покоится, вектор скорости имеет вид

$$V^i = \delta_0^i \,, \tag{54}$$

а символы Кристоффеля обращены в нуль в заданной точке пространства - времени. В этом случае оператор D оказывается пропорциональным производной по времени, а оператор ∇_i будет содержать производные только по пространственным координатам.

УПРАЖНЕНИЯ

У.1.1. Найти связь между конвективной производной D и классической "полной производной по времени" $\frac{d}{dt}$.

У.1.2. Доказать формулу (48).

У.1.3. Найти полный набор собственных векторов тензора энергии-импульса изотропного поля, представленного формулами

$$T^{ij} = W k^i k^j \,, \quad k^i k_i = 0 \,.$$

У.1.4. Найти разность векторов макроскопической скорости Ландау - Лифшица и Эккарта; показать, что они совпадают в отсутствие теплового потока.

ЛЕКЦИЯ 2

УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

2.1. Уравнение баланса числа частиц

При феноменологическом подходе к описанию релятивистских гидродинамических систем баланс числа частиц сорта (a) регламентируется уравнением

$$N^k_{(a);k} = \omega_{(a)}\,, \tag{55}$$

где скаляр $\omega_{(a)}$ представляет собой локальную плотность источников и стоков, производящих или уничтожающих частицы сорта (a). В рамках классической гидродинамики и кинетической теории процессы "исчезновения"и "возникновения"частиц данного сорта ассоциируется исключительно с химическими реакциями. Релятивистская гидродинамика открывает новую возможность для интерпретации правой части уравнения (55). Согласно релятивистской квантовой теории поля взаимодействующие частицы высоких энергий могут порождать комплекты новых частиц, если их кинетическая энергия превышает суммарную энергию покоя рождающихся частиц, и выполняются законы сохранения электрического, барионного, лептонного и т.д. зарядов. В этом смысле релятивистская гидродинамика допускает прямую интерпретацию в терминах "рождения"и "уничтожения"частиц [34], а также в терминах теории "множественных процессов"[9].

Суммируя (55) по сортам частиц, получим уравнение баланса для вектора числа частиц N^k

$$N^k_{;k} = n\Gamma\,, \quad n\Gamma \equiv \sum_{(a)} \omega_{(a)}\,. \tag{56}$$

Вспоминая про представление вектора потока числа частиц (5) и про разложение оператора ковариантного дифференцирования (52), получим после очевидных преобразований, что

$$Dn + n\nabla_k V^k + \nabla_k J^k - J^k DV_k = n\Gamma \,, \tag{57}$$

$$nDx_{(a)} + J^i \nabla_i x_{(a)} = \omega_{(a)} - x_{(a)} n\Gamma + I^i_{(a)} DV_i - \nabla_i I^i_{(a)} \,. \tag{58}$$

Для достижения окончательного результата были использованы два известных соотношения: нормировки $V^k V_k = 1$ и ортогональности $V^k J_k = 0$, а также согласно (56) введена функция Γ, описывающая скорость производства частиц.

Если в качестве V^i выбрана скорость U^i, определенная по Эккарту, то вектор J^i обращается в нуль, и уравнения баланса (57), (58) приводятся к виду

$$Dn + n\nabla_k U^k = n\Gamma \,, \tag{59}$$

$$nDx_{(a)} = \omega_{(a)} - x_{(a)} n\Gamma + I^i_{(a)} DV_i - \nabla_i I^i_{(a)} \,. \tag{60}$$

Если в качестве V^i выбрана скорость U^i, определенная по Ландау - Лифшицу, то уравнения баланса (57),(58) принимают более сложный вид:

$$Dn + n\nabla_k U^k - \nabla_k \left(\frac{1}{h} I^k_{(q)} \right) + \frac{1}{h} I^k_{(q)} DV_k = n\Gamma \,. \tag{61}$$

$$nDx_{(a)} - \frac{1}{h} I^k_{(q)} \nabla_i x_{(a)} = \omega_{(a)} - x_{(a)} n\Gamma + I^i_{(a)} DV_i - \nabla_i I^i_{(a)} \,. \tag{62}$$

Дифференциальному уравнению баланса (56) можно сопоставить интегральное уравнение. Полное число частиц, произведенных гидродинамической системой $\delta\mathcal{N}_{(tot)}$ получается с помощью теоремы Гаусса:

$$\delta\mathcal{N}_{(tot)} \equiv \int_{\mathcal{V}} dV n\Gamma = \int_{\mathcal{V}} dV N^k_{;k} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} N^k) =$$

$$= \int_{\mathcal{V}} d^4x \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} N^k) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma_k N^k \,. \tag{63}$$

Здесь символ $d\Sigma_k$ означает меру интегрирования на замкнутой гиперповерхности Σ, ориентированной по нормальному вектору V^k, а $\partial\mathcal{V}$ символизирует границу четырехмерной области $\mathcal{V}$, которая содержит в себе всю гидродинамическую систему в целом.

Если $\Gamma \equiv 0$, то следует говорить о локальном законе сохранения числа частиц. Если $\delta\mathcal{N}_{(tot)} = 0$, речь должна идти о глобальном законе сохранения. Очевидно, что из выполнения локального закона сохранения следует выполнение глобального, но не наоборот, поскольку в системе могут находиться и "источники и "стоки такие, что полное производство частиц для системы в целом отсутствует.

Почему при $\delta\mathcal{N}_{(tot)} \equiv 0$ мы говорим о сохранении числа частиц? Дело в том, что в таком случае, пользуясь произвольностью выбора гиперповерхности, содержащей всю систему в целом, мы можем разбить интеграл по замкнутой гиперповерхности $\partial\mathcal{V}$ на сумму интегралов по гиперплоскостям $t_1 = const$, $t_2 = const$ и по бесконечно удаленным гиперповерхностям, составляющим замыкание данной граничной гиперповерхности. С учетом противоположной направленности векторов внешних нормалей к этим гиперповерхностям, а также в связи с предположением, что гидродинамическая система пространственно ограничена, можно записать следующее соотношение:

$$\int_{t_1=const} d\Sigma_k N^k = \int_{t_2=const} d\Sigma_k N^k \,. \qquad (64)$$

Это равенство означает, что полное число частиц не зависит от выбора гиперповерхности $t = const$, или, иначе говоря, число частиц в системе сохраняется с течением времени.

2.2. Уравнение баланса энергии - импульса

Баланс энергии - импульса в гидродинамической системе регламентируется соотношением

$$T^{ik}{}_{;k} = \mathcal{T}^i \,, \qquad (65)$$

где вектор $\mathcal{T}^i$ описывает локальное производство энергии - импульса за счет источников и стоков, существующих в системе. В отличие от уравнений баланса числа частиц (55),(58) баланс энергии импульса не записывается покомпонентно, то есть, для каждого сорта частиц. Исторически это связано с тем, что для простых смесей, которые не вступают в химические реакции, число частиц каждого сорта обычно сохраняется, а потому интересен баланс частиц каждого сорта. Что же касается энергии и импульса отдельных компонент, то механическое взаимодействие частиц разных сортов неминуемо ведет к перемешиванию парциальных потоков энергии и импульса, и сохраняется только полный импульс и полная энергия. В терминах операторов D и ∇_i уравнение (65) выглядит следующим образом:

$$(V_k D + \nabla_k)\left(W V^i V^k + V^i I^k + V^k I^i - P\ \Delta^{ik} + \Pi^{ik}\right) = \mathcal{T}^i \,. \qquad (66)$$

Свертка уравнения (66) с вектором скорости V_i дает скалярное уравнение, которое принято называть уравнением баланса энергии. После очевидных преобразований оно может быть представлено в виде:

$$DW + (W + P)\nabla_k V^k + 2V_k D I^k + \nabla_k I^k - \Pi^{ik}\nabla_k V_i = V_i \mathcal{T}^i \,. \qquad (67)$$

Свертка (66) с проектором Δ^l_i дает уравнение для определения скорости движения гидродинамической системы

$$nhDV^j = \nabla^j P - I^j \nabla_k V^k - I^k \nabla_k V^j - \Delta^j_i D I^i + \Pi^{jk} D V_k - \Delta^j_i \nabla_k \Pi^{ik} + \Delta^j_i \mathcal{T}^i . \qquad (68)$$

Если гидродинамическая скорость U^i определена согласно правилу Эккарта (32), то пространственная часть вектора Пойнтинга совпадает с тепловым потоком, и в уравнениях (67),(68) символ I^i следует заменить на $I^i_{(q)}$. Если воспользоваться определением Ландау-Лифшица, то пространственная часть вектора Пойнтинга исчезнет, а уравнения (67),(68) заметно упростятся и примут вид:

$$DW + (W+P)\nabla_k U^k - \Pi^{ik}\nabla_k U_i = V_i \mathcal{T}^i \,. \tag{69}$$

$$nhDU^j = \nabla^j P + \Pi^{jk} DU_k - \Delta^j_i \nabla_k \Pi^{ik} + \Delta^j_i \mathcal{T}^i \,. \tag{70}$$

2.3. Уравнение баланса энтропии

Уравнение баланса энтропии имеет вид скалярного уравнения дивергентного типа:

$$S^k_{\ ;k} = \sigma \,, \tag{71}$$

где σ представляет собой скаляр производства энтропии. С учетом представления (27) для вектора потока энтропии, а также уравнения баланса для числа частиц (57) уравнение (71) принимает вид

$$nDs = -J^k \nabla_k s + I^k_{(s)} DV_k - \nabla_k I^k_{(s)} + \sigma - ns\Gamma \,. \tag{72}$$

2.4. Частные виды течений в релятивистской гидродинамике

Несимметричный тензор $U_{i;k}$ распадается на неприводимые части

$$U_{k;i} = U_i DU_k + \nabla_i U_k = U_i DU_k + \sigma_{ik} + \omega_{ik} + \frac{1}{3}\Delta_{ik}\Theta \,, \tag{73}$$

где DU_k - гидродинамическое ускорение, σ_{ik} - бесследовый тензор сдвига:

$$\sigma_{ik} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_i U_k + \nabla_k U_i) - \frac{1}{3}\Delta_{ik}\nabla_l U^l \,, \tag{74}$$

ω_{ik} и Θ - тензор вращения и скаляр растяжения (сжатия), соответственно:

$$\omega_{ik} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_i U_k - \nabla_k U_i) \,, \tag{75}$$

$$\Theta \equiv \nabla_l U^l \,. \tag{76}$$

Существует следующая стандартная терминология. Если $\Theta = 0$, течение жидкости называется *несжимаемым*; если $\omega_{ik} = 0$, течение жидкости называется *безвихревым* или *потенциальным*; если $\sigma_{ik} = 0$, течение жидкости называется *бессдвиговым*.

УПРАЖНЕНИЯ

У.2.1. Используя трехмерные векторные и матричные обозначения, записать формулы (55)-(58),(68),(72) в локально-лоренцевой системе отсчета.

ЛЕКЦИЯ 3

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Первый закон термодинамики

Следуя логике феноменологического подхода, релятивистское обобщение первого закона (первого начала) термодинамики (уравнения Гиббса) для гомогенной системы запишем в терминах вариаций удельной энергии δe, объема, приходящегося на одну частицу $\delta\left(\frac{1}{n}\right)$ и удельного количества теплоты δQ:

$$\delta e + P\delta\left(\frac{1}{n}\right) = \delta Q\,. \tag{77}$$

Согласно теории систем с переменным числом частиц [35] такая форма представления уравнения Гиббса приемлема в том случае, если полное количество частиц в гидродинамической системе неизменно, т.е., $\delta\mathcal{N}_{(tot)} = 0$. В противном случае в уравнении (77) следовало бы перейти от удельных величин к полным плотностям энергии и количества теплоты, а также дополнить полученное уравнение слагаемым, состоящим из произведения полного химического потенциала $\mathcal{M}$ на $\delta\mathcal{N}_{(tot)}$ [35]. Вспоминая замечание о локальном и глобальном законе сохранения числа частиц, мы будем в дальнейшем иметь в виду, что равенство нулю $\delta\mathcal{N}_{(tot)} = 0$, вообще говоря, не означает равенства $\Gamma = 0$, а потому сохраним ненулевое значение Γ в последующих формулах.

Запись, содержащая вариации, означает, как и в классической термодинамике, что изменение термодинамической величины не обязательно является полным дифференциалом, однако, баланс энергии, объема и количества теплоты фиксирован указанным соотношением. Если же под символом вариации δ допустимо понимать конвективную производную D, то левую часть данного равенства легко сконструировать следующим образом: прибавим к уравнению (67) уравнение (57), умноженное на $-h$. С учетом определения $W = ne$ получим

$$n\left[De + PD\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= 2I^k DV_k - \nabla_k I^k + \Pi^{ik}\nabla_k V_i + h(\nabla_k J^k - J^k DV_k) + V_i \mathcal{T}^i - nh\Gamma\,. \quad (78)$$

С другой стороны, следует предположить, что, как и в классической теории, изменение количества теплоты пропорционально изменению удельной энтропии, причем коэффициент пропорциональности есть температура:

$$\delta Q = T\delta s\,. \quad (79)$$

Тогда, воспользовавшись соотношением (72) для Ds, можно выразить производство энтропии σ через гидродинамические потоки и источники

$$T\sigma = V_i \mathcal{T}^i - nh\Gamma + nsT\Gamma + \Pi^{ik}\nabla_k V_i + (2I^k - hJ^k - TI^k_{(s)})DV_k +$$

$$+ T\nabla_k I^k_{(s)} + h\nabla_k J^k - \nabla_k I^k + TJ^k \nabla_k s\,. \quad (80)$$

Для однокомпонентной среды из (26) следует, что

$$I^k_{(s)} = \frac{1}{T} I^k_{(q)}\,. \quad (81)$$

Тогда, используя соотношение, связывающее между собой химический потенциал μ, удельную энтальпию h, температуру T и удельную энтропию s

$$\mu = h - Ts\,, \quad (82)$$

логично упростить формулу (80), выбрав в качестве скорости V^i макроскопическую скорость по Эккарту U^i. Помня о том, что определение Эккарта требует, чтобы $J^i \equiv 0$, получим

$$T\sigma = U_i \mathcal{T}^i - \mu n\Gamma + \Pi^{ik}\nabla_k U_i + I^k_{(q)}\left(DU_k - \frac{1}{T}\nabla_k T\right)\,. \quad (83)$$

Аналогично, при использовании определения Ландау-Лифшица получим

$$T\sigma = U_i\mathcal{T}^i - \mu n\Gamma + \Pi^{ik}\nabla_k U_i + I^k_{(q)}\frac{T}{h}\nabla_k\left(\frac{\mu}{T}\right) . \tag{84}$$

Используя разложения (73)-(76), удобно в формулах (83),(84) преобразовать скаляр $\Pi^{ik}\nabla_k U_i$, записав его в виде

$$\Pi^{ik}\nabla_k U_i = \Pi^{ik}\sigma_{ik} + \frac{1}{3}\Theta\Pi\,, \quad \Pi \equiv \Pi^k_k = \Pi^{ik}\Delta_{ik}\,. \tag{85}$$

3.2. Соотношение Гиббса - Дюгема

Взяв в качестве определения химического потенциала соотношение (82), найдем вариацию:

$$\delta\mu = \left[\delta e + P\delta\left(\frac{1}{n}\right) - T\delta s\right] + \frac{1}{n}\delta P - s\delta T\,. \tag{86}$$

Выражение в квадратных скобках обращается в нуль в силу первого закона термодинамики (77) и соотношения (79). Оставшееся соотношение

$$\frac{1}{n}\delta P = \delta\mu + s\delta T \tag{87}$$

называется соотношением Гиббса - Дюгема. Наиболее часто его применение связано с заменой оператора вариации на оператор градиента, например, весьма известное соотношение

$$\nabla_k\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\frac{h}{T}\left(\frac{1}{T}\nabla_k T - \frac{1}{nh}\nabla_k P\right) \tag{88}$$

получается прямым дифференцированием $\frac{\mu}{T}$ с использованием соотношения Гиббса - Дюгема и формулы (82).

3.3. Второй закон термодинамики

Краеугольным камнем термодинамики является второй закон (начало), суть которого состоит в том, что в замкнутой системе производство энтропии σ неотрицательно. Для того, чтобы удовлетворить этому закону, в рамках феноменологической термодинамики принято представлять скаляр производства энтропии в виде положительно определенной квадратичной формы относительно термодинамических потоков [36]. Эта идея переносится и на релятивистскую термодинамику. Начнем изложение соответствующей методики со случая линейной релятивистской термодинамики.

3.3.1. Линейная термодинамика диссипативных процессов

Предположим, что в гидродинамической системе нет источников производства частиц и энергии-импульса (т.е., $\Gamma \equiv 0$, $\mathcal{T}^i = 0$, и система замкнута). Ограничимся линейными слагаемыми по термодинамическим потокам I^k,J^k, $I^k_{(q)}$, Π^{ik} в уравнениях баланса числа частиц и энергии-импульса (57) и (67). Тогда в уравнении (80) выражение DV_k следует заменить выражением

$$DV_k = \frac{1}{nh} \nabla_k P \,, \tag{89}$$

взятым из уравнения (68) при нулевых потоках. В результате получим, что для обоих определений макроскопической скорости: и для определения Эккарта, и для определения Ландау - Лифшица, производство энтропии σ имеет одинаковый вид

$$\sigma = I^k_{(q)} \frac{1}{h} \nabla_k \left(\frac{\mu}{T}\right) + \frac{1}{T} \Pi^{ik} \nabla_k U_i \,. \tag{90}$$

Термодинамические потоки Π^{ik} и $I^k_{(q)}$ следует считать независимыми, а потому и первое, и второе слагаемые в соотношении (90) должны быть неотрицательными в отдельности. Первое слагаемое станет неотрицательным, если положить

$$I^k_{(q)} = -\lambda \frac{T^2}{h} \nabla^k \left(\frac{\mu}{T}\right) \equiv \lambda \left(\nabla^k T - \frac{T}{nh} \nabla^k P\right) \,. \tag{91}$$

λ есть коэффициент теплопроводности, в общем случае он является функцией температуры. Знак минус выбран из тех соображений, что выражение

$$-\frac{1}{\lambda T^2} g_{ik} I^i_{(q)} I^k_{(q)} \,, \tag{92}$$

представляющее собой первое слагаемое в выражении для производства энтропии (90), станет при этом явно неотрицательным в силу пространственноподобности четыре-вектора $I^k_{(q)}$. В нерелятивистском пределе из соотношения (91) автоматически следует известный закон Фурье

$$\vec{I}_{(q)} = -\lambda \vec{\nabla} T \,. \tag{93}$$

Для того, чтобы гарантировать неотрицательность второго слагаемого в (90), мы должны построить симметричный тензор Π^{ik} из производных от четыре-вектора скорости U^i. Обычно в этом тензоре выделяют бесследовую часть $\Pi^{ik}_{(0)}$ и часть, пропорциональную следу этого тензора $\Pi \equiv \Pi^k_k$:

$$\Pi^{ik} = \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi \,. \tag{94}$$

Классические аналоги диктуют нам следующие утверждения: обобщенный закон Ньютона устанавливает, что бесследовая часть $\Pi^{ik}_{(0)}$ тензора анизотропного давления пропорциональна тензору сдвига, а обобщенный закон Стокса гласит, что след Π пропорционален дивергенции скорости. Тогда в принятых нами обозначениях получим

$$\Pi^{ik}_{(0)} = \eta\sigma^{ik} = \eta\left[\frac{1}{2}\left(\nabla^i U^k + \nabla^k U^i\right) - \frac{1}{3}\Delta^{ik}\nabla_l U^l\right] , \tag{95}$$

$$\Pi = 3\zeta\Theta = 3\zeta\nabla_k U^k \,, \tag{96}$$

$$\Pi^{ik} = \eta\sigma^{ik} + \zeta\Theta\Delta^{ik} \,. \tag{97}$$

Коэффициенты η и ζ представляют собой константы сдвиговой и объемной вязкости, соответственно. В таком случае величина

$$\Pi^{ik}\nabla_k U_i = \eta\sigma^{ik}\sigma_{ik} + \zeta\Theta^2 = \frac{1}{\eta}\Pi_{ik(0)}\Pi^{ik}_{(0)} + \frac{1}{9\zeta}\Pi^2 \tag{98}$$

гарантированно неотрицательна. Окончательно получаем следующее выражение для производства энтропии:

$$\sigma = -\frac{1}{\lambda T^2} I^k_{(q)} I_{k(q)} + \frac{1}{\eta}\Pi^{ik}_{(0)}\Pi_{ik(0)} + \frac{1}{9\zeta}\Pi^2 \,. \tag{99}$$

Это выражение квадратично по термодинамическим потокам, но линейно по коэффициентам теплопроводности и вязкости.

3.3.2. Причинная термодинамика

В классической термодинамике известен обобщенный закон Фурье

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\vec{I}_{(q)} + \vec{I}_{(q)} = -\lambda\vec{\nabla}T\,, \tag{100}$$

который принято называть законом Максвелла - Каттанео [31,32]. Этот закон превращается в закон Фурье (93) при $\tau \to 0$, однако, при ненулевых значениях времени релаксации τ этот закон делает уравнение эволюции температуры

$$\tau\frac{\partial^2}{\partial t^2}T + \frac{\partial}{\partial t}T - \chi\vec{\nabla}^2 T = 0 \tag{101}$$

уравнением гиперболического типа, в отличие от классического параболического уравнения теплопроводности. Это обстоятельство приводит к тому, что скорость распространения тепла становится конечной, и мы вправе говорить о соответствии данной модели требованиям постулатов теории относительности.

Обобщая закон Максвелла - Каттанео на релятивистский случай, рассмотрим для простоты модель с нулевыми источниками и с нулевыми коэффициентами $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, описывающими взаимодействие между вязкостью и теплопроводностью в формуле (29). Пусть макроскопическая скорость U^i определена согласно правилу Эккарта. Будем исходить из анзаца Израэля - Стьюарта о том, что ни уравнение Гиббса, ни определение температуры не модифицируются, т.е., переносятся без изменений из равновесной термодинамики в причинную. Математически это означает, что в принятых нами обозначениях именно скаляр энтропии $s_{(\mathrm{eq})}$ удовлетворяет уравнению Гиббса (77),(79)

$$TnDs_{(\mathrm{eq})} = 2I^k_{(q)}DU_k - \nabla_k I^k_{(q)} + \Pi^{ik}\nabla_k U_i\,. \tag{102}$$

Раскладывая вектор потока энтропии на продольную и поперечную по отношению к четыре-вектору скорости составляющие

$$S^i{=}U^i\left[ns_{(\mathrm{eq})}{-}\frac{1}{2T}\left(\beta_0\ \Pi^2{-}\beta_1\ g_{lk}I^l_{(q)}I^k_{(q)}{+}\beta_2\ \Pi^{lm}_{(0)}\Pi^{kn}_{(0)}g_{lk}g_{mn}\right)\right]+\frac{1}{T}I^i_{(q)} \tag{103}$$

и вычисляя ковариантную дивергенцию вектора S^i, получаем следующее соотношение

$$TS^i_{;i} = T\sigma = \Pi\left[\frac{1}{3}\Theta - \beta_0 D\Pi - \frac{T}{2}\Pi\left(\frac{\beta_0 U^l}{T}\right)_{;\ l}\right] +$$
$$+I^k_{(q)}\left[\left(DU_k - \frac{1}{T}\nabla_k T\right) + \beta_1 DI_{k(q)} + \frac{T}{2}I_{k(q)}\left(\frac{\beta_1 U^l}{T}\right)_{;\ l}\right] +$$
$$+\Pi^{ik}_{(0)}\left[\sigma_{ik} - \beta_2 D\Pi_{(0)ik} - \frac{T}{2}\Pi_{(0)ik}\left(\frac{\beta_2 U^l}{T}\right)_{;\ l}\right]. \tag{104}$$

Соотношение (104) примет вид (99), если ввести следующие определения диссипативных термодинамических потоков:

$$9\zeta\beta_0 D\Pi + \Pi + \frac{9\zeta T}{2}\Pi\left(\frac{\beta_0 U^l}{T}\right)_{;\ l} = 3\zeta\Theta\,, \tag{105}$$

$$\lambda T\beta_1\Delta^i_k DI^k_{(q)}{+}I^i_{(q)}{+}\frac{\lambda T^2}{2}I^i_{(q)}\left(\frac{\beta_1 U^l}{T}\right)_{;\ l} = \lambda T\left(\frac{1}{T}\nabla^i T - DU^i\right)\,, \tag{106}$$

$$\eta\beta_2\Delta^i_m\Delta^k_n D\Pi^{mn}_{(0)} + \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{\eta T}{2}\Pi^{ik}_{(0)}\left(\frac{\beta_2 U^l}{T}\right)_{;\ l} = \eta\sigma^{ik}\,. \tag{107}$$

Как и в классической теории Максвелла - Каттанео, мы получили *дифференциальные уравнения* для определения неравновесных потоков Π, $I^i_{(q)}$ и $\Pi^{ik}_{(0)}$. Если $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, определения (105)-(107) дают соотношения (96),(91),(95), полученные в рамках линейной термодинамики. Вводя три новых параметра - времена релаксации τ_0,τ_1,τ_2 - согласно следующим определениям:

$$\tau_0 = 9\zeta\beta_0\,,\quad \tau_1 = \lambda T\beta_1\,,\quad \tau_2 = \eta\beta_2\,, \tag{108}$$

получим окончательно

$$\tau_0 D\Pi + \Pi + \frac{\tau_0}{2}\Pi\left[\Theta + D\left(\log\frac{\tau_0}{\zeta T}\right)\right] = 3\zeta\Theta\,, \tag{109}$$

$$\tau_1\Delta^i_k D I^k_{(q)} + I^i_{(q)} + \frac{\tau_1}{2} I^i_{(q)}\left[\Theta + D\left(\log\frac{\tau_1}{\lambda T^2}\right)\right] = \lambda T\left(\frac{1}{T}\nabla^i T - DU^i\right)\,, \tag{110}$$

$$\tau_2\Delta^i_m\Delta^k_n D\Pi^{mn}_{(0)} + \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{\tau_2}{2}\Pi^{ik}_{(0)}\left[\Theta + D\left(\log\frac{\tau_2}{\eta T}\right)\right] = \eta\sigma^{ik}\,. \tag{111}$$

Введение времен релаксации τ_0,τ_1,τ_2 позволяет описать явления запаздывания в термодинамике, тем самым оправдывая альтернативное название данной теории "переходная термодинамика". Определения (109), (110), (111) делают уравнения баланса (57), (67), (68), (72) интегро-дифференциальными, а саму причинную термодинамику - нелокальной теорией, поскольку состояние системы в данный момент зависит от ее предыстории.

УПРАЖНЕНИЯ

У.3.1. Используя матричные и трехмерные векторные обозначения, переписать формулы (109), (110), (111) в локально - лоренцевой системе отсчета.

У.3.2. Получить аналоги законов Стокса, Фурье и Ньютона с учетом запаздывания вязких потоков и потоков тепла, полагая, что времена релаксации, коэффициенты вязкости и теплопроводности не зависят от времени.

ЛЕКЦИЯ 4

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Как установлено в предыдущей лекции, в рамках линейной термодинамики вектор потока тепла $I^i_{(q)}$, тензор анизотропного давления Π^{ik}, пространственноподобная часть $I^i_{(s)}$ вектора потока энтропии S^i не являются независимыми динамическими переменными и могут быть представлены с помощью пространственных производных от температуры T, давления P, вектора макроскопической скорости U_i, а также химического потенциала μ (см.(91),(94)-(96), (81)). Химический потенциал можно выразить через удельную энергию e, давление P плотность числа частиц n, температуру T и удельную энтропию s (82). Таким образом, шесть уравнений баланса (57),(67),(68),(72) и первое начало термодинамики (77) связывают между собой восемь независимых величин: пять скаляров e,n,T,P,s и три независимые компоненты четыре-вектора скорости V^i. Для самозамкнутости уравнений линейной гидродинамики необходимо сформулировать последнее условие связи. Обычно его называют уравнением состояния и записывают в параметрическом виде.

4.1. Двухпараметрические уравнения состояния

Полагая, что независимыми переменными считаются температура T и плотность числа частиц n, уравнение состояния можно моделировать в виде двухпараметрического соотношения

$$P = P(n, T), \quad W = W(n, T). \tag{112}$$

Связь P и W не является произвольной, а подчиняется условию интегрируемости. Это условие можно получить следующим образом.

Из уравнения Гиббса, представленного в виде

$$Ds = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}DT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial n} - \frac{P}{n^2}\right) Dn\,, \tag{113}$$

следует, что

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}\,, \quad \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e}{\partial n} - \frac{P}{n^2}\right)\,. \tag{114}$$

Полагая, что частные производные коммутируют

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial n} = \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\,, \tag{115}$$

находим условие, при котором Ds является полным дифференциалом, или иначе, условие интегрируемости:

$$n^2\frac{\partial e}{\partial n} + T\frac{\partial P}{\partial T} = P\,. \tag{116}$$

В терминах W это условие имеет вид:

$$n\frac{\partial W}{\partial n} + T\frac{\partial P}{\partial T} = W + P\,. \tag{117}$$

4.1.1. Идеальный газ

Рассмотрим простейший пример, когда удельная плотность энергии e не завистит от плотности числа частиц n, а плотность энергии W, является, соответственно, линейной функцией плотности числа частиц $W = ne(T)$. В этом случае уравнение (116) дает решение $P = f_1(n)T$, где $f_1(n)$ - произвольная функция. Наиболее известным примером уравнения данного типа является уравнение состояния для релятивистского идеального газа

$$P = nk_BT, \quad W = ne(T)\,, \quad e(T) = k_BT\left[\lambda\frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)} - 1\right], \quad \lambda \equiv \frac{mc^2}{k_BT}. \tag{118}$$

Символом $K_s(\lambda)$ обозначены модифицированные функции Бесселя [8], определенные следующим образом:

$$K_s(\lambda) \equiv \int_0^\infty dt \exp\{-\lambda\cosh t\}\cosh st\,. \tag{119}$$

4.1.2. Газ Ван-дер-Ваальса

Пусть плотность энергии W есть квадратичная функция плотности числа частиц

$$W(n,T) = ne(T) - an^2\,, \qquad (120)$$

где a - некоторая константа. Тогда уравнение (117) дает $P + an^2 = f_2(n)T$, где $f_2(n)$ - произвольная функция. В разряд таких уравнений состояния попадает уравнение Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{nk_BT}{1-nb} - an^2\,. \qquad (121)$$

4.1.3. Ядерная жидкость

Одно из модельных уравнений состояния ядерной жидкости, справедливое при температурах выше энергии Ферми [34], основано на следующем представлении удельной плотности энергии

$$e(n,T) = \frac{K}{18}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right)^2 + \frac{3}{2}T + \frac{\pi^2}{10n}T^4 + m_n\,. \qquad (122)$$

В данной формуле K - коэффициент ядерной сжимаемости, n - барионная плотность, n_0 - плотность насыщения симметричной ядерной материи. Второй член в правой части (122) описывает тепловые возбуждения нуклонов, третий - тепловые возбуждения пи-мезонов, а последнее слагаемое есть энергия покоя нуклона. В обзоре [34], из которого процитирована формула (122), использованы энергетические единицы для температуры (отсутствует привычная постоянная Больцмана) и для энергии покоя нуклона ($m_n = 938$ Мэв; в данной формуле отсутствует привычный коэффициент c^2). Решая уравнение (116), восстановим давление P с точностью до произвольной функции $f_3(n)$:

$$P(n,T) = Tf_3(n) + \frac{Kn^2}{9n_0}\left(\frac{n}{n_0} - 1\right) + \frac{\pi^2}{30}T^4\,. \qquad (123)$$

Слагаемое, линейное по температуре, следует отождествить с давлением нуклонов nT, которое соответствует нерелятивистскому вкладу $\frac{3}{2}T$ нуклонов в удельную энергию ядерной жидкости. Таким образом, произвольная функция $f_3(n)$ оказывается линейной $f_3(n) = n$.

4.2. Однопараметрические уравнения состояния

В астрофизических и космологических приложениях релятивистской гидродинамики используются упрощенные уравнения состояния, в которых игнорируется одна из переменных T или n. В таком случае мы имеем дело с так называемыми однопараметрическими уравнениями состояния. Приведем три примера таких уравнений.

4.2.1. Политропное уравнение состояния

Пусть давление не зависит от температуры и представлено степенной функцией плотности числа частиц

$$P = Kn^{\gamma}\,. \tag{124}$$

Коэффициент γ называется показателем политропы. Прямое интегрирование уравнения (117) дает в этом случае решение

$$W(n) = nf(T) + \frac{Kn^{\gamma}}{\gamma - 1}\,. \tag{125}$$

Для нерелятивистских политроп [5] произвольная функция $f(T)$ оказывается равной энергии покоя частицы $f(T) = mc^2$, а потому плотность энергии W часто предсталяют в виде

$$W(n) = nmc^2 + \frac{P}{\gamma - 1}\,. \tag{126}$$

4.2.2. Уравнение состояния вырожденной фермионной системы

Для моделирования равновесных конфигураций белых карликов и нейтронных звезд [5], характеризующихся температурой, близкой к нулю, используется уравнение состояния вырожденных фермионных систем

$$P = \frac{1}{8\pi^2\hbar^3}\left\{p_F\left(\frac{2}{3}p_F^2 - m^2c^2\right)E_F + m^4c^5\log\left(\frac{cp_F + E_F}{mc^2}\right)\right\}\,, \tag{127}$$

$$W = \frac{1}{8\pi^2\hbar^3}\left\{p_F\left(2p_F^2+m^2c^2\right)E_F - m^4c^5\log\left(\frac{cp_F+E_F}{mc^2}\right)\right\}. \qquad (128)$$

Здесь $\hbar$ - постоянная Планка, p_F - импульс Ферми, E_F - энергия Ферми:

$$p_F \equiv \hbar\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{1}{3}}, \quad E_F \equiv c\sqrt{m^2c^2+p_F^2}. \qquad (129)$$

В этом случае удельная энтальпия $h = \frac{W+P}{n}$ совпадает с химическим потенциалом μ и энергией Ферми

$$h = \mu = E_F = c\sqrt{m^2c^2+p_F^2}, \qquad (130)$$

а упрощенное уравнение (117)

$$\frac{\partial W}{\partial n} = h \qquad (131)$$

выполняется тождественно в силу (128) и (129).

4.2.3. Уравнение состояния радиационно - доминированных систем

Рассмотрим теперь ситуацию, когда давление и плотность энергии есть степенные функции температуры. Уравнение (117) будет удовлетворено, если

$$P = AT^\alpha, \quad W = (\alpha-1)AT^\alpha = (\alpha-1)P. \qquad (132)$$

Пример такого уравнения состояния предоставляет система, в эволюции которой давление излучения играет преобладающую роль [5]. В этом случае $\alpha = 4$ (закон Стефана-Больцмана), связь давления и плотности энергии имеет вид $W = 3P$, и мы пришли к так называемому ультрарелятивистскому уравнению состояния, для которого след тензора энергии-импульса равен нулю.

4.3. Баротропные уравнения состояния

О баротропных уравнениях состояния речь идет в том случае, если задано уравнение, явно связывающее давление и плотность энергии

$$P = P(W). \qquad (133)$$

Среди баротропных уравнений состояния наиболее известны линейные уравнения

$$P = \sigma W - B\,, \tag{134}$$

где σ и B - некоторые константы. Соотношение (117) в этом случае имеет вид

$$n\frac{\partial W}{\partial n} + T\sigma\frac{\partial W}{\partial T} = W(1+\sigma) - B\,. \tag{135}$$

Интегрирование этого уравнения приводит к следующему результату:

$$W = \frac{1}{1+\sigma}\left[T^{1+\frac{1}{\sigma}} f\left(\frac{T}{n^{\sigma}}\right) + B\right]\,, \tag{136}$$

где $f\left(\frac{T}{n^{\sigma}}\right)$ - произвольная функция своего аргумента.

4.3.1. Линейные уравнения с $B = 0$

Перечислим наиболее известные примеры линейных уравнений состояния с $B = 0$.

(i) При $\sigma = \frac{1}{3}$ получаем уравнение состояния ультрарелятивистской среды $W = 3P$. Как упоминалось ранее, это уравнение состояние может быть получено из равенства нулю одного из инвариантов пространственно изотропного тензора энергии - импульса, а именно следа T^k_k. Формула (136) при $\sigma = \frac{1}{3}$ и $B = 0$ описывает уравнение состояния радиационно доминированной среды (132), если функция $f\left(\frac{T}{n^{\sigma}}\right)$ постоянна, и уравнение состояния ультрарелятивистской идеальной жидкости $W = 3k_B nT$, если

$$f = 4k_B\left(\frac{T}{n^{\sigma}}\right)^{-3}\,. \tag{137}$$

(ii) При $\sigma = 1$ получим уравнение состояния сверхжесткой среды

$$W = P = \frac{1}{2}\left[T^2 f\left(\frac{T}{n}\right)\right]\,, \tag{138}$$

Такой термин обусловлен тем, что скорость звука в такой среде равна скорости света.

(iii) При $\sigma = -1$ получим уравнение состояния вакуумо-подобной среды, для которой $P + W = 0$. Для такой среды тензор энергии - импульса имеет вид $T_k^i = W\delta_k^i$, следовательно, собственное значение W четырехкратно вырождено, и любой вектор является собственным. Решая уравнение (135) при $\sigma = -1$ и $B = 0$, получим

$$W = -P = f\left(nT\right)\,, \tag{139}$$

где $f\left(nT\right)$ - произвольная функция своего аргумента.

4.3.2. Уравнение состояния кварк-глюонной плазмы

Для моделирования уравнения состояния кварк - глюонной плазмы используют так называемую "константу мешка"$\mathcal{B}$ [34]:

$$W = 3P + 4\mathcal{B}\,. \tag{140}$$

Очевидно, что уравнение (140) относится к разряду линейных с $\sigma = \frac{1}{3}$ и $\mathcal{B} = \frac{3}{4}B$, а потому плотность энергии W обязана иметь вид (136). Однако, модельное уравнение для плотности энергии удобнее записать с помощью температуры и кваркового химического потенциала μ [34]:

$$W = \frac{37}{30}\pi^2T^4 + 3\mu^2T^2 + \frac{3\mu^4}{2\pi^2} + \mathcal{B}\,. \tag{141}$$

Барионная плотность n есть кубическая функция μ [34]:

$$n = \frac{2\mu}{3}\left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}\right)\,, \tag{142}$$

следовательно, аргумент $\frac{T}{n^{\frac{1}{3}}}$ произвольной функции $f\left(\frac{T}{n^{\frac{1}{3}}}\right)$ можно представить с помощью иррациональной функции от $z \equiv \frac{\mu}{\pi T}$

$$\frac{T}{n^{\frac{1}{3}}} = \left[\frac{2\pi}{3}z\left(1 + z^2\right)\right]^{-\frac{1}{3}}\,. \tag{143}$$

Выразив W в формуле (141) с помощью z

$$W = \frac{3\pi^2}{4}T^4\left(\frac{74}{45} + 4z^2 + 2z^4\right) + \mathcal{B}\,, \tag{144}$$

легко увидеть, что существует иррациональная функция f, превращающая уравнение (136) в (144).

4.4. Уравнения состояния и скорость звука

Согласно определению С.Вайнберга [37] адиабатическая скорость звука $v_{(s)}$ задается соотношением

$$\left(\frac{v_{(s)}}{c}\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial W}\right)_{(s)} = \frac{T}{(W+P)}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^{-1} + \frac{n}{W+P}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right). \tag{145}$$

Формула для адиабатической скорости звука принимает удивительно простой вид для баротропных уравнений состояния (133). Действительно, дифференцируя P как функцию одной переменной W, из (145) получим

$$\left(\frac{v_{(s)}}{c}\right)^2 \equiv \left(\frac{dP}{dW}\right)\left[\frac{T}{nh}\left(\frac{dP}{dW}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right) + \frac{1}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)\right]. \tag{146}$$

Выражение в квадратных скобках равно единице в силу соотношения (117), и мы получаем

$$v_{(s)} = c\sqrt{\left(\frac{dP}{dW}\right)}. \tag{147}$$

В частности, для линейных баротропных уравнений состояния $v_{(s)} = c\sqrt{\sigma}$, причем $v_{(s)} = c$ для сверхжесткой среды (138) и $v_{(s)} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ для ультрарелятивистского уравнения состояния. Формулу для скорости звука в идеальном газе мы рассмотрим в следующей лекции, а исследование остальных формул вынесено в качестве упражнений к данной лекции.

УПРАЖНЕНИЯ

У.4.1. Найти формулу скорости звука для уравнения состояния Ван - дер - Ваальса (120), (121).

У.4.2. Найти формулу скорости звука для уравнения состояния ядерной жидкости (122), (123).

У.4.3. Найти формулу скорости звука для уравнения состояния вырожденной фермионной системы (127), (128).

У.4.4. Найти формулу скорости звука для уравнения политропного состояния (124)-(126).

ЛЕКЦИЯ 5

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ АНАЛОГИ КЛАССИЧЕСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Идеальная жидкость

Полагая, что все неравновесные потоки равны нулю, а также отсутствуют источники частиц, энергии, импульса и энтропии, т.е.,

$$J^i = 0\,, \quad I^i = 0\,, \quad I^i_{(s)} = 0\,, \quad \omega_{(a)} = 0\,, \quad \mathcal{T}^i = 0\,, \quad \sigma = 0\,, \tag{148}$$

получим из (57),(67),(68) следующую систему уравнений

$$Dn = -n\nabla_k U^k\,, \tag{149}$$

$$DW = -nh\nabla_k U^k\,, \tag{150}$$

$$DU^i = \frac{1}{nh}\nabla^i P\,. \tag{151}$$

В данных уравнениях вместо символа V^i использовано обозначение U^i. Дело в том, что для идеальной жидкости

$$N^i = nV^i\,, \quad T^{ik} = WV^iV^k - P(g^{ik} - V^iV^k)\,, \quad T^{ik}V_k = WV^i\,, \tag{152}$$

а потому определения Эккарта и Ландау-Лифшица дают одно и то же значение макроскопической скорости. Уравнение (149) есть уравнение неразрывности потока. Уравнение (151) представляет собой релятивистское обобщение уравнения Эйлера. Исключая дивергенцию скорости из уравнений (149) и (150), получим соотношение

$$De + PD\left(\frac{1}{n}\right) = 0\,. \tag{153}$$

Это означает, что $Ds = 0$, и процесс эволюции такой гидродинамической системы есть процесс изэнтропический (адиабатический).

Вводя, как обычно, теплоемкость при постоянном давлении C_p и теплоемкость при постоянном объеме C_v

$$C_p \equiv \frac{\partial h}{\partial T}, \quad C_v \equiv \frac{\partial e}{\partial T}, \tag{154}$$

из (153) получим уравнение эволюции температуры

$$C_v DT = \nabla_k U^k \left(\frac{P}{n} - n \frac{\partial e}{\partial n} \right). \tag{155}$$

Если предположить, что e зависит только от температуры T, а давление задается формулой $P = nk_B T$, то из (155) получим

$$\frac{DT}{T} = (1 - \gamma)\ \nabla_k U^k, \tag{156}$$

где показатель адиабаты γ задается соотношением

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{k_B}{C_v}. \tag{157}$$

Показатель адиабаты γ в общем случае есть функция от температуры T. Вычислим этот параметр для релятивистского газа, рассматриваемого в гидродинамическом контексте. Поскольку для релятивистского газа [8]

$$h(T) = mc^2 \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}, \tag{158}$$

выполняя дифференцирование в формулах (154) с учетом правил дифференцирования модифицированных функций Бесселя

$$\left(-\frac{d}{d\lambda}\right) \left[\frac{K_n(\lambda)}{\lambda^n} \right] = \frac{K_{n+1}(\lambda)}{\lambda^n}, \quad \left(-\frac{d}{d\lambda}\right) [\lambda^n K_n(\lambda)] = \lambda^n K_{n-1}(\lambda), \tag{159}$$

получим

$$C_v = k_B \left\{ \lambda^2 - 1 + 5 \left(\frac{h}{k_B T} \right) - \left(\frac{h}{k_B T} \right)^2 \right\}, \tag{160}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \left\{ \lambda^2 + 5 \left(\frac{h}{k_B T} \right) - \left(\frac{h}{k_B T} \right)^2 \right\}. \tag{161}$$

В нерелятивистском ($\lambda >> 1$) и ультрарелятивистском ($\lambda << 1$) пределах показатели адиабаты оказываются постоянными величинами, равными, соответственно, $\frac{5}{3}$ и $\frac{4}{3}$. Скорость звука, рассчитанная по формуле (145), имеет вид

$$v_{(s)} = c\sqrt{\frac{k_B T}{h}\left(1 + \frac{k_B}{C_v}\right)} = c\sqrt{\gamma \frac{k_B T}{h}}\,, \tag{162}$$

где удельная энтальпия h и показатель адиабаты γ задаются, соответственно, формулами (158) и (161).

5.2. Релятивистская теплопроводящая невязкая жидкость

Рассмотрим гидродинамическую модель, в рамках которой тепловой поток (91) есть макроскопически значимая величина, но поток вязкого давления по-прежнему исчезающе мал. В такой модели эволюционные уравнения, основанные на определении Ландау-Лифшица для макроскопической скорости U^i, принимают вид

$$nhDU^j = \nabla^j P\,, \tag{163}$$

$$D(ne) = -nh\nabla_k U^k\,, \tag{164}$$

$$Dn + n\nabla_k U^k - \nabla_k\left(\frac{1}{h}I^k_{(q)}\right) + \frac{1}{h}I^k_{(q)}DU_k = 0\,. \tag{165}$$

5.2.1. Линейная термодинамика и процессы теплопроводности

Представим конвективную производную от произведения ne с помощью соотношения

$$D(ne) = \left(e + n\frac{\partial e}{\partial n}\right)Dn + nC_v DT, \tag{166}$$

а конвективную производную от скорости из уравнения (163) подставим в (165). Полагая, что в рамках линейной гидродинамики произведением градиентов термодинамических функции можно пренебречь по сравнению со второй производной от одной из них (например, величиной $\nabla^i P\nabla_i h$ по сравнению с $h\nabla^i\nabla_i P$) [8], а также считая, что удельная энергия e не зависит от плотности n, получим, как следствие формул (164) и (166), соотношение

$$nC_vDT = -P\nabla_k U^k + \lambda \left(1 - \frac{P}{nh}\right) \left(\Delta T - \frac{T}{nh}\Delta P\right), \qquad (167)$$

где Δ - оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \nabla_m \nabla^m. \qquad (168)$$

Уравнение (167) представляет собой релятивистское уравнение теплопроводности в рамках линейной термодинамики. Это уравнение относится к уравнениям параболического типа, а потому скорость распространения тепла не ограничена, что противоречит основам релятивистской теории многочастичных систем.

5.2.2. Причинная термодинамика и процессы теплопроводности

Для того, чтобы получить уравнение гиперболического типа для эволюции температуры, необходимо воспользоваться релятивистским обобщением закона Максвелла - Каттанео (109)-(111). Как и в пункте 5.2.1., будем полагать, что квадраты и произведения производных от термодинамических величин намного меньше, чем произведения самих величин на их вторые производные. Работая в таком приближении и считая параметр τ_1 постоянным, представим уравнение (110) в виде:

$$DI^i_{(q)} = -\frac{1}{\tau_1} I^i_{(q)} + \frac{\lambda T}{\tau_1} \left(\frac{1}{T}\nabla^i T - DU^i\right). \qquad (169)$$

С другой стороны, из уравнений (163)-(165) выразим дивергенцию теплового потока

$$\nabla_i I^i_{(q)} = \frac{h}{e}(nC_vDT + P\nabla_j U^j). \qquad (170)$$

Следующим шагом применим оператор ∇_i к уравнению (169), оператор D к уравнению (170) и найдем разность полученных выражений. В заданном приближении

$$\nabla_i DI^i_{(q)} - D\nabla_i I^i_{(q)} = 0, \qquad (171)$$

и как следствие (171) мы получаем уравнение

$$\tau_1 D^2T+DT=\frac{\lambda}{nC_v}\left(1-\frac{P}{nh}\right)\left(\Delta T-\frac{T}{nh}\Delta P\right)-\frac{P}{nC_v}\left(\nabla_k U^k+\frac{\tau_1}{nh}\Delta P\right). \tag{172}$$

При $\tau_1 = 0$ уравнение (172) дает (167) после очевидных алгебраических преобразований. Если $\tau_1 \neq 0$, мы получаем уравнение гиперболического типа для температуры.

5.3. Релятивистская нетеплопроводящая вязкая жидкость

В данной модели тепловой поток считается исчезающе малым, неравновесные термодинамические свойства потока жидкости представлены тензором вязкого давления (94)-(96). В этом случае уравнения динамики жидкости в представлении Ландау - Лифшица приводятся к следующей системе:

$$Dn + n\nabla_k U^k = 0\,, \tag{173}$$

$$D(ne) + nh\nabla_k U^k - \Pi^{ik}\nabla_k U_i = 0\,, \tag{174}$$

$$nhDU^j = \nabla^j P + \Pi^{jk}DU_k - \Delta^j_i \nabla_k \Pi^{ik}\,. \tag{175}$$

5.3.1. Релятивистская жидкость с нулевой сдвиговой вязкостью

Данная модель широко применяется при исследовании изотропных космологических моделей, поскольку космологический принцип требует, чтобы среда обладала только объемной вязкостью (bulk viscosity). Полагая, что

$$\Pi^{ik} = \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi\,, \tag{176}$$

перепишем уравнения (174) и (175) в виде

$$D(ne) + (ne+\mathcal{P})\nabla_k U^k = 0\,, \tag{177}$$

$$(ne+\mathcal{P})DU^j = \nabla^j \mathcal{P}\,, \tag{178}$$

где

$$\mathcal{P} \equiv P - \frac{1}{3}\Pi \tag{179}$$

есть полное давление, состоящее из Паскалевской части P и неравновесного давления $-\frac{1}{3}\Pi$. В такой записи уравнения (177) и (178) выглядят как уравнения идеальной жидкости с давлением $\mathcal{P}$, однако, в данном случае, в отличие от идеальной жидкости, производство энтропии отлично от нуля: $\sigma = \frac{1}{9\zeta}\Pi^2$.

5.3.2. Линейная термодинамика и релятивистская вязкая жидкость

В рамках *линейной* термодинамики тензор анизотропного давления алгебраически выражается через производные от четыре - вектора скорости:

$$\Pi^{ik} = \Pi^{ik}_{(0)} + \frac{1}{3}\Delta^{ik}\Pi\,, \tag{180}$$

$$\Pi^{ik}_{(0)} = \frac{1}{2}\eta\left[\nabla^i U^k + \nabla^k U^i - \frac{2}{3}\Delta^{ik}\nabla_l U^l\right]\,, \tag{181}$$

$$\Pi = 3\zeta\nabla_l U^l\,, \tag{182}$$

а уравнения (175) приводятся к виду:

$$nhDU^j = \nabla^j P - \frac{\eta}{2}\Delta U^j - \left(\zeta + \frac{1}{6}\eta\right)\nabla^j\nabla_l U^l\,. \tag{183}$$

Уравнения (183) представляют собой релятивистское обобщение уравнений Навье - Стокса. Это есть дифференциальное уравнение параболического типа относительно вектора скорости. Следовательно, такая гидродинамическая модель не согласуется с представлениями о конечности скорости распространения информации в теории относительности. Для того, чтобы продемонстрировать, каким образом удается избавиться от этих противоречий в рамках причинной термодинамики, рассмотрим следующую упрощенную модель.

5.3.3. Причинная термодинамика и релятивистская жидкость с нулевой сдвиговой вязкостью

Пусть выполнены предположения, сформулированные в начале параграфа 5.2.2., пусть $\tau_1 = \tau_2 = 0$, и пусть в системе отсутствуют теплопроводность и сдвиговая вязкость. Тогда из трех соотношений (109)-(111) нетривиальным остается только одно:

$$\tau_0 D\Pi + \Pi = 3\zeta\Theta\,. \tag{184}$$

В указанном приближении операторы D и ∇_k можно менять местами. Вычислив коммутатор

$$D\nabla^j\Pi - \nabla^j D\Pi = 0 \tag{185}$$

с помощью соотношений (178) и (184), исключим Π из уравнения для скорости:

$$\tau_0 nhD^2U^j + nhDU^j = (1+\tau_0 D)\nabla^j P - \zeta\nabla^j\nabla_l U^l\,. \tag{186}$$

Полученное уравнение совпадает с релятивистским уравнением Навье - Стокса (183), если $\tau_0 = 0$ и $\eta = 0$. Уравнение (186) представляет собой уравнение гиперболического типа, и его использование решает проблему причинности в релятивистской гидродинамике.

5.4. Сверхтекучая жидкость

Модель сверхтекучей жидкости как двухкомпонентной гидродинамической системы впервые была представлена в 1941 году в работе Л.Д. Ландау, но лишь в восьмидесятых годах 20 века появился релятивистский аналог этой модели. Модель строится с использованием двух векторов скорости: скорости нормальной компоненты $V^i_{(n)}$ и скорости сверхтекучей компоненты $V^i_{(s)}$. Полный вектор тока числа частиц

$$N^i = n_{(n)}V^i_{(n)} + n_{(s)}V^i_{(s)} \tag{187}$$

удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i N^i = 0\,. \tag{188}$$

Дивергенция полного модельного тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = n_{(n)}h_{(n)}V^i_{(n)}V^k_{(n)} + n_{(s)}h_{(s)}V^i_{(s)}V^k_{(s)} - g^{ik}(P_{(n)} + P_{(s)}) \tag{189}$$

также равна нулю

$$\nabla_k T^{ik} = 0\,. \tag{190}$$

Что же касается энтропии, удельная энтропия сверхтекучей компоненты равна по определению нулю

$$s_{(s)} \equiv 0\,, \tag{191}$$

а полная энтропия равна энтропии нормальной компоненты

$$S^i = n_{(n)} s_{(n)} V^i_{(n)} \tag{192}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i S^i = 0\,. \tag{193}$$

Главная проблема релятивистской феноменологической гидродинамики сверхтекучей жидкости связана с тем обстоятельством, что семнадцать искомых величин: $n_{(s)}$, $n_{(n)}$, $e_{(s)}$, $e_{(n)}$, $P_{(s)}$, $P_{(n)}$, $s_{(s)}$, $s_{(n)}$, $V^i_{(s)}$, $V^i_{(n)}$ и T, - связаны десятью уравнениями (шестью уравнениями баланса (188), (190), (193), уравнением Гиббса, двумя уравнениями нормировки скоростей, уравнением для энтропии сверхтекучей компоненты (191)). Данную модель необходимо дополнить семью соотношениями, имеющими статус уравнений состояния. Четыре из них задаются в виде условия потенциальности для потока энтальпии сверхтекучей компоненты:

$$h_{(s)} V^i_{(s)} = \Psi^{;i}\,. \tag{194}$$

Отметим, что удельная энтальпия сверхтекучей компоненты совпадает с химическим потенциалом, поскольку ее энтропия равна нулю. Чтобы исключить из рассмотрения скаляр Ψ, вместо уравнения (194) можно рассмотреть его дифференциальное следствие

$$\Psi^{;i;k} - \Psi^{;k;i} \equiv 0 = (h_{(s)} V^i_{(s)})^{;k} - (h_{(s)} V^k_{(s)})^{;i}\,. \tag{195}$$

Свертка этого дифференциального следствия со скоростью $V^k_{(s)}$ дает соотношение

$$V^k_{(s)}(h_{(s)}V^i(s))_{;k} = (h_{(s)})^{;i}\,. \tag{196}$$

Одно из оставшихся трех уравнений связывает плотности числа частиц нормальной и сверхтекучей компонент. В частности, если гидродинамическая система однородна и стационарна, то следует полагать

$$n_{(n)} + n_{(s)} \equiv n = const\,, \tag{197}$$

а для неоднородных систем в уравнении (197) плотности числа частиц следует заменить полным числом частиц соответствующего сорта. Оставшиеся два уравнения призваны связать давления $P_{(s)}$ и $P_{(n)}$ с остальными переменными. В силу скалярной природы этих уравнений скорости нормальной и сверхтекучей компонент входят в них через скалярное произведение:

$$Q = g_{ik}V^i_{(s)}V^k_{(n)}. \tag{198}$$

Если относительная скорость течения нормальной и сверхтекучей компонент отлична от нуля, то скаляр Q отличен от единицы и как новый параметр представляет интерес для теоретического моделирования.

5.5. Ударные волны в релятивистской гидродинамике

Как и в классической гидродинамике, в релятивистской гидродинамике существуют течения, для которых динамические переменные терпят разрыв на некоторой двумерной поверхности Σ, называемой фронтом ударной волны. Если обозначить символом ξ^i пространственноподобный вектор нормали к поверхности Σ, то из законов сохранения числа частиц, энергии и импульса можно получить условия, задающие скачки искомых функций при переходе через границу фронта:

$$\left[N^i\xi_i\right] = 0\,, \quad \left[T^{ik}\xi_k\right] = 0\,. \tag{199}$$

Символ $[\mathbf{A}]$ означает разность в значениях функции $\mathbf{A}$ непосредственно за фронтом $\mathbf{A}^+$ и перед ним $\mathbf{A}^-$. Пусть $Y^+(\Sigma)$ и $Y^-(\Sigma)$ представляют собой функции Хевисайда, отличные от нуля, соответственно, за и перед поверхностью фронта $\Sigma(x) = 0$. Любая тензорная величина $\mathbf{A}$ может быть задана (подробности смотри в обзоре [38]) суммой

$$\mathbf{A} = Y^+(\Sigma)\mathbf{A} + Y^-(\Sigma)\mathbf{A}\,. \tag{200}$$

Согласно символическим правилам дифференцирования обобщенных функций [38] производная разбивается на три составляющие:

$$\nabla_i\mathbf{A} = Y^+(\Sigma)\nabla_i\mathbf{A} + Y^-(\Sigma)\nabla_i\mathbf{A} + \delta(\Sigma)\nabla_i\Sigma(x)[\mathbf{A}]\,, \tag{201}$$

которые локализованы, соответственно, за фронтом, перед фронтом и на самом фронте. Поскольку вектор $\nabla_i\Sigma(x)$ пропорционален вектору ξ_i, то из законов сохранения

$$\nabla_i N^i = 0\,, \quad \nabla_k T^{ik} = 0 \tag{202}$$

следуют равенства (199) в силу независимости функций Хевисайда и дельта-функции $\delta(\Sigma)$. Предположим далее, что речь идет о плоском пространстве - времени, что координата x направлена вдоль нормали к поверхности разрыва и что тангенциальные компоненты скорости отсутствуют. Тогда условия (199) на поверхности разрыва в идеальной жидкости предстанут в виде

$$[N^x] \equiv [nU^x] = 0\,, \quad [T^{0x}] \equiv [(W+P)U^0U^x] = 0\,,$$
$$[T^{xx}] \equiv [(W+P)(U^x)^2 + P] = 0\,. \tag{203}$$

В терминах удельной энтальпии $h \equiv \frac{W+P}{n}$ три уравнения на разрывах (203) могут быть переписаны в виде

$$n_1U_1^x = n_2U_2^x\,, \quad h_1n_1(U_1^x)^2 - h_2n_2(U_2^x)^2 = P_2 - P_1\,,$$

$$h_1 n_1 U_1^x \sqrt{1+(U_1^x)^2} = h_2 n_2 U_2^x \sqrt{1+(U_2^x)^2}\,. \tag{204}$$

Решая данную алгебраическую систему, найдем, что

$$n_1 U_1^x = n_2 U_2^x = \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{\frac{h_1}{n_1} - \frac{h_2}{n_2}}}\ . \tag{205}$$

Исключив скорости из рассмотрения, получим соотношение

$$h_2^2 - h_1^2 = (P_2 - P_1)\left(\frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2}\right)\,, \tag{206}$$

известное как "адиабата Тауба". Так же, как и адиабата Ранкина-Гюгонио в классической гидродинамике, адиабата Тауба связывает скачок давления на фронте ударной волны с энтальпией и плотностью числа частиц по обе стороны от фронта.

УПРАЖНЕНИЯ

У.5.1. Выяснить условия, при которых релятивистский идеальный газ подчиняется закону Пуассона $Tn^{1-\gamma} = const$.

У.5.2. С помощью уравнения гиперболического типа (172) найти скорость распространения температурных волн в приближении исчезающе малого давления.

У.5.3. В рамках причинной термодинамики вязкой нетеплопроводящей жидкости вывести уравнение гиперболического типа для скорости U^i в случае ненулевой сдвиговой вязкости ($\eta \neq 0$), но исчезающе малой объемной вязкости ($\zeta = 0$).

У.5.4. Получить адиабату Ранкина - Гюгонио как нерелятивистский предел адиабаты Тауба.

ЛЕКЦИЯ 6

ГИДРОДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

6.1. Релятивистская заряженная жидкость

Пусть частицы, составляющие гидродинамическую систему, обладают электрическими зарядами $e_{(a)}$ (как и прежде, (a) означает индекс сорта частиц). В этом случае к стандартному "контактному"взаимодействию между частицами добавляется электромагнитное, которое приводит к формированию макроскопического электромагнитного поля. Обозначим, как обычно, символом F^{ik} тензор Максвелла - тензор напряженности макроскопического электромагнитного поля. В данном поле заряженная частица, характеризующаяся импульсом p^i и массой покоя $m_{(a)}$, испытывает действие силы Лоренца

$$\mathcal{F}^i_{(a)} = \frac{e_{(a)}}{m_{(a)}c^2} F^i_{\cdot k} \, p^k \, . \tag{207}$$

Сила Лоренца относится к разряду "гироскопических сил для которых

$$\frac{\partial}{\partial p^i} \mathcal{F}^i_{(a)} = 0 \, , \tag{208}$$

а потому не приводит к производству частиц (см. следующую лекцию). Однако, сила Лоренца перераспределяет энергию и импульс в гидродинамической системе, следовательно, источник $\mathcal{T}^i$ в уравнениях (67),(68) отличен от нуля. Докажем, что в данном случае

$$\mathcal{T}^i = \sum_{(a)} e_{(a)} F^i_{\cdot k} \; N^k_{(a)} \, . \tag{209}$$

Для доказательства вспомним, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид [1]:

$$T^{ik}_{(\mathrm{em})} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F^{k}_{\cdot \; l} \right] \, . \tag{210}$$

Дивергенция тензора энергии-импульса электромагнитного поля в силу уравнений Максвелла

$$\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} I^i_{(e)} \,, \quad \nabla_k F_{il} + \nabla_l F_{ki} + \nabla_i F_{lk} = 0 \tag{211}$$

сводится к конструкции вида

$$\nabla_k T^{ik}_{(\mathrm{em})} = -\frac{1}{c} F^i_{\cdot k} I^k_{(e)} \,. \tag{212}$$

Четыре-вектор электрического тока $I^i_{(e)}$ по определению есть сумма парциальных токов

$$I^i_{(e)} \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} c N^i_{(a)} \,. \tag{213}$$

Если потребовать, чтобы полный тензор энергии-импульса, состоящий из суммы T^{ik} для гидродинамической системы и $T^{ik}_{(\mathrm{em})}$ для электромагнитного поля, обладал нулевой дивергенцией, то получим искомое соотношение

$$\nabla_k T^{ik} = -\nabla_k T^{ik}_{(\mathrm{em})} = \sum_{(a)} e_{(a)} F^i_{\cdot k} \, N^k_{(a)} \,. \tag{214}$$

Альтернативное доказательство формулы (214) будет дано в следующей лекции. Вспоминая, что согласно (9),(10)

$$N^i_{(a)} = \frac{n_{(a)}}{n} N^i + I^i_{(a)} \,, \tag{215}$$

и воспользовавшись определением Эккарта для макроскопической гидродинамической скорости U^i, получим, что электрический ток распадается на две составляющие: продольную и поперечную относительно скорости U^i

$$I^i_{(e)} = c U^i \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)} + \sum_{(a)} e_{(a)} I^i_{(a)} \,. \tag{216}$$

В первом слагаемом сумма

$$\rho \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)} \tag{217}$$

играет роль плотности заряда в среде. Второе слагаемое, будучи вектором, ортогональным скорости U^i, может быть представлено как линейная комбинация четыре-векторов электрического E^i и магнитного H^i полей. Последние определяются соотношениями [24]

$$E^i \equiv F^{ik} U_k \,, \quad H^i = \frac{1}{2} \epsilon^{iklm} F_{lm} U_k \tag{218}$$

и в силу определения ортогональны вектору скорости

$$E^i U_i = 0 = H^i U_i \,. \tag{219}$$

Символ ϵ^{iklm} использован для обозначения ковариантно постоянного абсолютно антисимметричного тензора Леви - Чивита [1]. С помощью определений (218),(219) однозначно восстанавливается тензор Максвелла как линейная функция векторов электрического и магнитного полей

$$F_{lm} = E_l U_m - E_m U_l - \epsilon_{lmpq} H^p U^q \,. \tag{220}$$

Разложение

$$\sum_{(a)} e_{(a)} I^i_{(a)} \equiv \nu_E E^i + \nu_H H^i \tag{221}$$

следует считать релятивистским обобщением закона Ома. В классической теории скалярный коэффициент ν_E имеет смысл электрической проводимости жидкости. Псевдоскаляр ν_H полагается равным нулю в классической физике; поступим так же и в релятивистском случае.

В результате подстановки (215),(220),(221) в (209), "источник"энергии - импульса, связанный с электромагнитным взаимодействием в гидродинамической системе, можно представить в виде

$$\mathcal{T}^i = \rho E^i - \nu_E (U^i E^m E_m + \epsilon^{iklm} E_k H_l U_m) \,. \tag{222}$$

Изменение энергии гидродинамической системы спровоцировано скалярным источником

$$U_i \mathcal{T}^i = -\nu_E E^m E_m \,, \tag{223}$$

а импульс изменяется благодаря векторному источнику

$$\Delta^j_i \mathcal{T}^i = \rho E^j - \nu_E \epsilon^{jklm} E_k H_l U_m \,. \tag{224}$$

Уравнения баланса принимают окончательный вид

$$Dn + n\nabla_k U^k = 0 \,, \tag{225}$$

$$nDx_{(a)} = I^i_{(a)} DU_i - \nabla_i I^i_{(a)} \,, \tag{226}$$

$$D(en) + nh\nabla_k U^k + 2U_k D I^k_{(q)} + \nabla_k I^k_{(q)} - \Pi^{ik}\nabla_k U_i = -\nu_E E^m E_m \,, \tag{227}$$

$$nhDU^j = \nabla^j P - I^j_{(q)}\nabla_k U^k - I^k_{(q)}\nabla_k U^j - \Delta^j_i D I^i_{(q)} -$$

$$+\Pi^{jk} DU_k - \Delta^j_i \nabla_k \Pi^{ik} + \rho E^j - \nu_E \epsilon^{jklm} E_k H_l U_m \,, \tag{228}$$

$$T\sigma = -\nu_E E^m E_m + \Pi^{ik}\nabla_k U_i + I^k_{(q)}\left(DU_k - \frac{1}{T}\nabla_k T\right) . \tag{229}$$

Из (228) следует, что дополнительное ускорение в гидродинамической системе, спровоцированное действием электромагнитного поля, содержит два слагаемых. Первое из них пропорционально плотности заряда и величине электрического поля. Второе пропорционально векторному произведению электрического и магнитного полей и потому может быть отнесено к ускорению дрейфового типа. Первое слагаемое в правой части уравнения (229) неотрицательно в силу пространственноподобности вектора электрического поля. Таким образом, производство энтропии σ по-прежнему неотрицательно, как этого и требует второе начало термодинамики.

6.2. Релятивистская магнитогидродинамика

Релятивистская магнитогидродинамика занимается исследованием течений заряженной идеальной жидкости с бесконечно большой электрической проводимостью $\nu_E \to \infty$. Поскольку ток имеет конечную величину, то электрическое поле в такой модели обязано стремиться к нулю $E^i \to 0$. Прямой подход к получению уравнений магнитогидродинамики предполагает выполнение соответствующего предельного перехода, однако, получить модельные уравнения можно и более просто. Рассмотрим тензор Максвелла для поля, у которого отсутствует электрическая составляющая

$$F_{lm} = -\epsilon_{lmpq} H^p U^q \,. \tag{230}$$

Суммарный тензор энергии-импульса, состоящий из тензора энергии - импульса идеальной жидкости и тензора энергии - импульса соответствующего электромагнитного поля, примет следующий вид:

$$T^{ik} = \{(W+P)U^i U^k - g^{ik} P\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\frac{1}{2}g^{ik} - U^i U^k\right) H^l H_l - H^i H^k\right\}. \tag{231}$$

Вывод формулы (231) становится очевидным, если вспомнить, что тензор энергии импульса электромагнитного поля задан соотношением (210), а тензор Леви-Чивита обладает следующими свойствами:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{lmpq}\epsilon^{lmik} = -\delta^{ik}_{pq} \,, \quad \epsilon_{lmpq}\epsilon^{ljik} = -\delta^{jik}_{mpq} \,, \tag{232}$$

где δ^{ik}_{pq} и δ^{jik}_{mpq} - обобщенные тензоры Кронекера второго и третьего ранга, соответственно. Магнитное поле вносит вклад в полную энергию

$$W_{(\mathrm{tot})} = W - \frac{1}{8\pi} H^l H_l \,, \tag{233}$$

в тензор напряжений

$$\mathcal{P}^{ik}_{(\mathrm{tot})} = -P\Delta^{ik} - \frac{1}{4\pi} H^i H^k + \frac{1}{8\pi}\Delta^{ik} H^l H_l \,, \tag{234}$$

но не порождает потока тепла, т.е., $I^i_{(\mathrm{tot})} = 0$. В модели релятивистской магнитогидродинамики [13],[24] принято работать только со второй подсистемой уравнений Максвелла (211), полагая, что первая подсистема уравнений (211) служит определению исчезающе малого электрического поля. Подставляя (230) в (211), получим

$$(U^i H^k - U^k H^i)_{;k} = 0\,. \tag{235}$$

Свертки уравнений (235) со скоростью U_i и напряженностью магнитного поля H_i, соответственно, дают два важных скалярных следствия. Первое из них

$$H^k_{;k} = -H^k DU_k\,, \tag{236}$$

или иначе

$$\nabla_k H^k = 0\,, \tag{237}$$

есть известный закон сохранения магнитного потока в дифференциальной форме. Второе следствие

$$\frac{1}{2}D(H^k H_k) + H^k H_k \nabla_i U^i = H^i H^k \nabla_k U_i \tag{238}$$

с точностью до множителя совпадает с эволюционным уравнением для плотности энергии магнитного поля. Из условия (214) с учетом следствий (237) и (238) получим, что источник энергии-импульса $\mathcal{T}^i$ в магнитогидродинамической системе представляется формулой

$$\mathcal{T}^i = \frac{1}{4\pi}\left\{\Delta^{il} H^k \nabla_k H_l + H^l H_l DU^i - \frac{1}{2}\nabla^i (H^l H_l) - H^i H^k DU_k\right\}. \tag{239}$$

Скалярное произведение $U_i \mathcal{T}^i$, очевидно, равно нулю, т.е., уравнение эволюции энергии не содержит вклада от магнитного поля и имеет вид (150). Пространственная часть источника $\Delta^i_j \mathcal{T}^j$ в точности совпадает с (239). Таким образом, уравнение для определения скорости магнитогидродинамического течения представимо в следующем окончательном виде:

$$\left\{\left[nh-\frac{H^l H_l}{4\pi}\right]\delta^i_k+\frac{H^i H_k}{4\pi}\right\} DU^k=\nabla^i\left[P-\frac{H^l H_l}{8\pi}\right]+\frac{1}{4\pi}\Delta^{il}H^k\nabla_k H_l\,. \tag{240}$$

Это уравнение должно быть дополнено уравнениями электродинамики

$$\Delta^i_k DH^k = H^k\nabla_k U^i - H^i\nabla_k U^k\,, \quad \nabla_k H^k = 0\,, \tag{241}$$

а также законами сохранения числа частиц, энергии и энтропии

$$Dn = -n\nabla_k U^k\,, \quad DW = -nh\nabla_k U^k\,, \quad Ds = 0\,. \tag{242}$$

Заметим, наконец, что, комбинируя (241) и (242), легко получить соотношение

$$D\left(\frac{H^i}{n}\right) = \left(\frac{H^k}{n}\right)\left[\nabla_k U^i - U^i DU_k\right], \tag{243}$$

которому можно придать следующую форму

$$\Delta^i_k D\left(\frac{H^k}{n}\right) - \left(\frac{H^k}{n}\right)\nabla_k U^i = 0\,. \tag{244}$$

Вспоминая определение производной Ли $\pounds_U\lambda^k$ от вектора λ^k вдоль векторного поля U^i, получим, что соотношение (244) совпадает с требованием

$$\Delta^i_k \pounds_U\left(\frac{H^k}{n}\right) = 0\,. \tag{245}$$

Это означает, что проекция производной Ли, вычисленной вдоль векторного поля U^i от вектора $\frac{H^k}{n}$, на пространственноподобную гиперповерхность, ортогональную четыре-вектору скорости, обращается в нуль. Но, как известно, именно этим свойством характеризуются так называемые жидкие линии, составленные из движущихся частиц [16]. Отсюда следует классический вывод о том, что магнитные силовые линии "вморожены"в жидкость, т.е., частицы жидкости, располагавшиеся в начальный момент вдоль фиксированной магнитной силовой линии, в процессе движения так и останутся на этой силовой линии.

УПРАЖНЕНИЯ

У.6.1. Исходя из формул (228), получить обобщение уравнений Навье - Стокса для течения вязкой заряженной жидкости; ответ представить в трехмерных векторных обозначениях.

У.6.2. Исходя из формул (240), получить обобщение уравнений Эйлера для магнитогидродинамического течения; ответ представить в трехмерных векторных обозначениях.

У.6.3. Сформулировать условия на разрывах для магнитогидродинамических течений с помощью обобщения уравнений (199).

ЛЕКЦИЯ 7

О КИНЕТИЧЕСКОМ ОБОСНОВАНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

7.1. Кинетические уравнения

Изложение материала в данном параграфе предполагает, что читатель знаком с основами релятивистской кинетической теории, представленной в предыдущих лекциях данного цикла. Следует подчеркнуть, что существуют два варианта представления релятивистского кинетического уравнения:

$$\frac{p^i}{m_{(a)}c}\hat{\nabla}_i f_{(a)} + \mathcal{F}^i_{(a)}\frac{\partial f_{(a)}}{\partial p^i} = \sum_{(b)} J_{(a)(b)}\,, \tag{246}$$

$$\frac{p^i}{m_{(a)}c}\hat{\nabla}_i f_{(a)} + \frac{\partial}{\partial p^i}(\mathcal{F}^i_{(a)} f_{(a)}) = \sum_{(b)} J_{(a)(b)}\,. \tag{247}$$

И в первом, и во втором случае p^i -это импульс частицы, $m_{(a)}$ есть масса покоя частиц сорта (a), $\hat{\nabla}_i$ - оператор Картана [7], для которого

$$\hat{\nabla}_i \mathbf{A}(x,p) \equiv \mathbf{A}_{;i} - \Gamma^l_{ik} p^k \frac{\partial}{\partial p^l}\mathbf{A}\,, \tag{248}$$

$f_{(a)}$ - функция распределения частиц сорта (a), $\mathcal{F}^i_{(a)}$ - сила, действующая на частицы сорта (a), $J_{(a)(b)}$ - интеграл столкновений, описывающий парные взаимодействия частиц сорта (a) и (b). Уравнения (246) и (247) совпадают, если силы относятся к гироскопическому типу, т.е., если

$$\frac{\partial}{\partial p^i}\mathcal{F}^i_{(a)} = 0\,. \tag{249}$$

Уравнение первого типа (246) получено из условия, что производная от функции распределения по собственному времени вдоль фазовой траектории движения системы равна интегралу столкновений

$$\frac{d}{ds} f_{(a)}(x(s),p(s)) = \sum_{(b)} J_{(a)(b)}\,. \tag{250}$$

Уравнение второго типа (247) получено из условия, что восьмимерная дивергенция фазового потока равна интегралу столкновений

$$\hat{\nabla}_i \left(\frac{dx^i}{ds} f_{(a)}(x,p)\right) + \frac{\partial}{\partial p^i}\left(\frac{Dp^i}{ds} f_{(a)}(x^i,p^k)\right) = \sum_{(b)} J_{(a)(b)} \,. \qquad (251)$$

И в первом, и во втором случае предполагается, что динамика отдельной частицы описывается уравнениями

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{p^i}{m_{(a)}c} \,, \quad \frac{Dp^i}{ds} = \mathcal{F}^i_{(a)} \,. \qquad (252)$$

7.2. Уравнение баланса числа частиц

Проинтегрируем кинетическое уравнение (246) по импульсной части фазового пространства с помощью инвариантного объема [7]

$$dP \equiv d^4p\sqrt{-g} \,. \qquad (253)$$

Используя свойство оператора Картана [10]

$$\int dP \hat{\nabla}_i \Phi(x,p) = \left\{\int dP \Phi(x,p)\right\}_{;i} \qquad (254)$$

и интегрируя по частям, приходим к первому интегральному соотношению

$$\frac{1}{m_{(a)}c} N^i_{(a);i} - \int dP f_{(a)} \frac{\partial \mathcal{F}^i_{(a)}}{\partial p^i} = \sum_{(b)} \int dP J_{(a)(b)} \,. \qquad (255)$$

Здесь, как и ранее, символ $N^i_{(a)}$ обозначает вектор потока числа частиц, однако, теперь он явно представлен как первый момент функции распределения

$$N^i_{(a)}(x) \equiv \int dP p^i f_{(a)}(x,p) \,. \qquad (256)$$

Если столкновения частиц относятся к классу упругих столкновений, то интеграл в правой части (255) обращается в нуль тождественно. Рассмотрим, например, хорошо известный интеграл парных столкновений Больцмана

$$J_{(a)(b)}(p) \equiv \frac{1}{m_{(a)}c} \int dQ dP^{'} dQ^{'} \mathcal{W}(p,q|p^{'},q^{'}) \ \mathcal{B}(f,f) \,. \qquad (257)$$

Интеграл в правой части уравнения (255) обращается в нуль, поскольку скобка Больцмана

$$\mathcal{B}(f,f) \equiv [f_{(a)}(p^{'})f_{(b)}(q^{'}) - f_{(a)}(p)f_{(b)}(q)] \tag{258}$$

антисимметрична относительно замены пар (p,q) и $(p^{'},q^{'})$, а скаляр $\mathcal{W}(p,q|p^{'},q^{'})$, описывающий вероятность перехода пары сталкивающихся частиц из состояния с импульсами $(p^{'},q^{'})$ в состояние с импульсами (p,q), обладает следующими свойствами симметрии:

$$\mathcal{W}(p,q|p^{'},q^{'}) = \mathcal{W}(p^{'},q^{'}|p,q) = \mathcal{W}(q,p|p^{'},q^{'}) = \mathcal{W}(p,q|q^{'},p^{'})\,. \tag{259}$$

Тогда уравнение баланса (255) принимает вид

$$N^i_{(a);i} = m_{(a)}c\int dP f_{(a)}\frac{\partial \mathcal{F}^i_{(a)}}{\partial p^i}\,, \tag{260}$$

причем правая часть (260) представляет собой величину производства частиц $\omega_{(a)}$ за счет силы $\mathcal{F}^i_{(a)}$ (см. (55)).

Проделав ту же процедуру с кинетическим уравнением (247), получим, что уравнение баланса превращается в закон сохранения числа частиц в дифференциальной форме

$$N^i_{(a);i} = 0\,. \tag{261}$$

7.3. Уравнение баланса энергии-импульса

Проинтегрируем кинетическое уравнение (246) с весовым множителем p^l и получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{m_{(a)}c}T^{li}_{(a);i} - \int dP f_{(a)}\left(p^l\frac{\partial \mathcal{F}^i_{(a)}}{\partial p^i} + \mathcal{F}^l_{(a)}\right) = \sum_{(b)}\int dP p^l J_{(a)(b)}\,. \tag{262}$$

Здесь и далее

$$T^{ik}_{(a)}(x) \equiv \int dP\; p^i p^k f_{(a)}(x,p) \tag{263}$$

- тензор энергии-импульса частиц сорта (a), второй момент функции распределения.

Из теории парных упругих столкновений следует, что интеграл в правой части уравнения (262) равен нулю, в чем легко убедиться на примере интеграла столкновений Больцмана (257). Действительно, упомянутый интеграл в силу симметрии скаляра вероятности перехода и антисимметричности скобки Больцмана можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{(a),(b)}\int dPdQdP^{'}dQ^{'}\mathcal{W}(p,q|p^{'},q^{'})f_{(a)}(p^{'})f_{(b)}(q^{'})[p^{l}+q^{l}-p^{'l}-q^{'l}]\,. \tag{264}$$

Поскольку скаляр вероятности перехода по определению включает в качестве множителя дельта - функцию

$$\delta^{4}(p^{l}+q^{l}-p^{'l}-q^{'l})\,, \tag{265}$$

которая гарантирует сохранение энергии и импульса частиц в парных столкновениях, то очевидно, что выражение (264) исчезает. Поскольку для смеси упруго взаимодействующих частиц сохраняются только суммарные значения энергии и импульса, запишем уравнение баланса для полного тензора энергии - импульса $T^{ik}\equiv\sum_{(a)}T^{ik}_{(a)}$:

$$T^{li}{}_{;i}=\sum_{(a)}m_{(a)}c\int dPf_{(a)}\left(p^{l}\frac{\partial\mathcal{F}^{i}_{(a)}}{\partial p^{i}}+\mathcal{F}^{l}_{(a)}\right)\,. \tag{266}$$

Правая часть уравнения (266) задает "силовой"источник энергии - импульса, обозначенный ранее как $\mathcal{T}^{l}$. Для кинетического уравнения второго типа соответствующее уравнение не содержит в правой части слагаемого с дивергенцией силы. Если сила $\mathcal{F}^{i}_{(a)}$ есть сила Лоренца (207), то соответствующий источник энергии-импульса совпадает с источником (209), найденным в предыдущей лекции.

7.4. Уравнение баланса энтропии

Проинтегрируем уравнение (246) с весовым множителем

$$-k_{B}m_{(a)}c^{2}[\log\left((2\pi\hbar)^{3}f_{(a)}\right)-1]\,, \tag{267}$$

а затем просуммируем по всем сортам частиц. Как обычно, k_B - постоянная Больцмана, $\hbar$ - постоянная Планка. Результат этих операций можно записать в виде

$$S^i_{;i} = -k_B c^2 \sum_{(a)} m_{(a)} \left\{ \int dP f_{(a)} \frac{\partial \mathcal{F}^i_{(a)}}{\partial p^i} [\log((2\pi\hbar)^3 f_{(a)}) - 1] + \right.$$

$$\left. + \sum_{(b)} \int dP J_{(a)(b)} \log((2\pi\hbar)^3 f_{(a)}) \right\} , \qquad (268)$$

где формулой

$$S^i \equiv -k_B c \sum_{(a)} \int dP\ p^i f_{(a)} [\log((2\pi\hbar)^3 f_{(a)}) - 1] \qquad (269)$$

представлен полный четыре-вектор потока энтропии смеси. Для кинетического уравнения второго типа (247) аналогичный результат выглядит заметно проще:

$$S^i_{;i} = k_B c^2 \sum_{(a)} m_{(a)} \left\{ \int dP f_{(a)} \frac{\partial \mathcal{F}^i_{(a)}}{\partial p^i} - \sum_{(b)} \int dP J_{(a)(b)} \log((2\pi\hbar)^3 f_{(a)}) \right\} . \qquad (270)$$

Выражения в правых частях уравнений (268),(270) есть скаляры производства энтропии, которые естественным образом распадаются на столкновительную и силовую части. Столкновительная часть производства энтропии неотрицательна. Покажем это на примере интеграла столкновений Больцмана. Действительно, величина

$$\sigma_{(\mathrm{coll})} \equiv -k_B c^2 \sum_{(a)(b)} m_{(a)} \int dP J_{(a)(b)}(p) \log((2\pi\hbar)^3 f_{(a)}) \qquad (271)$$

в силу свойств симметрии скобки Больцмана и скаляра вероятности перехода может быть переписана в виде

$$\sigma_{(\mathrm{coll})} = \frac{k_B c}{4} \sum_{(a),(b)} \int dP dQ dP^{'} dQ^{'} \mathcal{W}(p,q|p^{'},q^{'}) f_{(a)}(p^{'}) f_{(b)}(q^{'})\ Y(X) ,$$

$$Y(X) \equiv (X-1)\log X , \quad X \equiv \frac{f_{(a)}(p) f_{(b)}(q)}{f_{(a)}(p^{'}) f_{(b)}(q^{'})} . \qquad (272)$$

Функция $Y(X)$ неотрицательна, причем обращается в нуль только если равна нулю скобка Больцмана (258). Знак "силовой"части производства энтропии в общем случае не определен.

Продолжая процесс интегрирования кинетического уравнения, домноженного на различные весовые коэффициенты, мы получим бесконечное число уравнений баланса для моментов более высокого порядка. В этом смысле информация, заложенная в релятивистском кинетическом уравнении, гораздо богаче, чем информация, которую можно получить из уравнений феноменологической гидродинамики. Более того, кинетический подход непосредственно дает и уравнение состояния, и явное представление неравновесных термодинамических потоков. Тем не менее, сама по себе феноменологическая линейная релятивистская гидродинамика остается одной из самых эффективных и привлекательных моделей в ковариантной теории сплошных сред.

УПРАЖНЕНИЯ

У.7.1. Доказать свойство (254) оператора Картана.

У.7.2. Получить уравнение баланса энергии - импульса, исходя из кинетического уравнения (247).

У.7.3. Получить уравнение баланса энтропии, исходя из кинетического уравнения (247).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973. - 504 с.

2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. - М.: Наука, 1974. - 520 с.

3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: ГИТТЛ, 1955. - 504 с.

4. Паули В. Теория относительности. - М.: ГИТТЛ, 1947. - 300 с.

5. Вейнберг С. Гравитация и космология. - М.: Мир, 1975. -696 с.

6. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Поля и фундаментальные взаимодействия. - Киев: Наукова Думка, 1986. - 552 с.

7. Власов А.А. Статистические функции распределения. - М.: Наука, 1966. - 356 с.

8. Де Гроот С., Ван Леувен В., Ван Верт Х. Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения.- М.:Мир, 1983. -422с.

9. Очелков Ю.П., Прилуцкий О.Ф., Розенталь И.Л. Релятивистская кинетика и гидродинамика. - М.: Атомиздат, 1979. - 196с.

10. Stewart J.M. Non-equilibrium Relativistic Kinetic Theory. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.

11. Ehlers J. General Relativity and Kinetic Theory. // Relativita Generale e Cosmologia, ed. R.Sashs. - New York: Academic Press, 1971. - p. 1-70.

12. Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory. // W.C. Schieve and J.S. Turner (Eds) Lectures in Statistical Physics. Berlin: Springer Verlag, 1974. - p. 78-93.

13. Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. - М.: Наука, 1984. - 351 с.

14. Черный Л.Т. Релятивистские модели сплошных сред. - М.: Наука, 1983. - 287 с.

15. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. - М.: Госатомиздат, 1961. - 244 с.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.Электродинамика сплошных сред. -М.: Наука, 1982. - 620 с.
17. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика.- М.: Наука, 1979. - 528 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.- М: Наука, 1986. - 736 с.
19. Калинин Д.А. СТО (Конспект лекций). - Казань: Изд-во КГУ, 1999. - 61 с.
20. Захаров А.В. Релятивистская кинетическая теория и космология. - Казань: Изд-во КГУ, 1990. - 124 с.
21. Захаров А.В. Макроскопическая гравитация. - М.: Янус-К, 2000. - 284 с.
22. Eckart C. // Phys. Rev., 1940, V. 58, p. 919.
23. Lichnerowicz A. // Comptes Rendus, 1940, V. 211, p. 177.
24. Lichnerowicz A. Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics. Benjamin, New York, 1967.
25. Kluitenberg G.A., de Groot S.R., Mazur P. // Physica, 1953, V. 19, p. 689.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. -М.: Гостехиздат, 1953. - 624 с.
27. Synge J.L. The Relativistic Gas. Amsterdam - North Holland Publ. Comp., 1957.
28. Israel W. // J. Math. Phys., 1963, V. 4, p. 1163.
29. Israel W. and Stewart J. // Ann. Phys., 1979, V. 118, p. 341.
30. Черников Н.А. // Acta Physica Pol., 1964, V. 27, p. 465.
31. Jou D., Casas - Vazques J. and Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. 1996, Berlin. Springer Verlag.
32. Maartens R., Causal thermodynamics in relativity. Lectures at the

Hanno Rund Workshop, 1996. (astro-ph/9609119).
33. Cattaneo C. // Comptes Rendus, 1958, 247, p. 431.
34. Барц Х.В., Кэмпфер Б., Лукач Б. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1987, Т.18, вып. 6, С. 1234-1282.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. ЧастьI. - М: Наука, 1976. - 584 с.
36. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир. 1979. - 512 с.
37. Weinberg S. // Astrophysical Journal, 1971, V. 168, p. 175.
38. Лихнерович А. Теория относительности и математическая физика. // Астрофизика, кванты и теория относительности. -М.: Мир, 1982. с. 129-214.

С О Д Е Р Ж А Н И Е